Conditions de l'épreuve

1. **Les documents et calculatrices personnelles sont interdits.**
2. **Durée : 1h00.**
3. **Chacune des copies portera le nom de l'étudiant et sera numérotée sous la forme i/n où i est le numéro de la copie et n est le nombre total de copies.**
4. **Toute tentative de fraude sera sanctionnée, au minimum par la note 0/20.**
5. **Le poids relatif des exercices est indiqué en fin d'énoncé.**

Exercice 1

Par exemple au moyen de tables de vérité, prouver que

$$(\mathrm{P} \iff \mathrm{Q}) \iff \left(\overline{\mathrm{P} \text{ et } \overline{\mathrm{Q}}} \text{ et } \overline{\mathrm{Q} \text{ et } \overline{\mathrm{P}}}\right)$$

Exercice 2

1. Écrire la négation des propositions suivantes (dont on ne demande pas de discuter la véracité) :
   (a) $x > 0$.
   (b) $-3 \leqslant x$ ou $x < 3$.
   (c) « Aucune des boules contenues dans l'urne n'est rouge. »
   (d) « Il existe un entier x tel que, pour tout entier y, il existe un entier z tel que $(z < y) \implies (z < x+1)$. »
2. On rappelle qu'une fonction f d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est dite impaire si et seulement si :

   $$\forall x \in \mathscr{D}_f, (-x \in \mathscr{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x))$$

   Caractériser le fait qu'une fonction g ne soit pas impaire.

Exercice 3

1. De la proposition suivante (dont on ne demande pas de discuter la véracité) :

   $$x > 8 \implies x > 3$$

   écrire :
   (a) la contraposée ;
   (b) la négation ;
   (c) la réciproque.
2. En justifiant la réponse, compléter l'énoncé suivant avec $\forall$ ou $\exists$ pour qu'il soit vrai :

   $$\ldots\ x \in \mathbb{R}, (x-1)^3 \neq x^3 + 3x^2 - 3x - 1$$

3. Soit n un entier *naturel* quelconque. Des implications suivantes, indiquez si elles sont vraies ou fausses, *en justifiant les réponses*.
   (a) $(n \geqslant 5) \implies (n > 3)$.
   (b) $(n \geqslant 5) \implies (n > 6)$.
   (c) $(n \geqslant 5) \implies (n \leqslant 6)$.
   (d) $(n < 2) \implies (n^2 = n)$.
   (e) $(n < 1) \implies$ (2 divise n).
   (f) $(n < 1) \implies$ (n divise 2).

Exercice 4

Pauline, Quentin et Romane, trois collègues, déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

(A_1) Si Pauline commande un dessert, Quentin en commande un aussi.

(A_2) Chaque jour, soit Quentin, soit Romane, mais pas les deux, commandent un dessert.

(A_3) Pauline ou Romane, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.

(A_4) Si Romane commande un dessert, Pauline fait de même.

1. Exprimer sous forme de calcul propositionnel :
   (a) (A_1) ;
   (b) (A_2) ;
   (c) (A_3) ;
   (d) (A_4) ;
2. Peut-on en déduire qui commande un dessert ? (On pourra recourir à une table de vérité.)
3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 5

Soit m, n, p trois entiers naturels et l'assertion : « Si $m^2 + n^2 = p^2$, il y a toujours au moins un des trois nombres, m, n ou p qui est pair ». Utiliser un raisonnement par contraposée ou un raisonnement par l'absurde pour établir cette assertion.

Barème indicatif					
Exercice	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5
Poids relatif	8 %	16 %	30 %	29 %	17 %