Exercice 1.

1. (a) On a

$$\begin{aligned} 4x^2-9=0 &\iff (2x-3)(2x+3)=0 \\ &\iff 2x-3=0 \quad \text{ou} \quad 2x+3=0 \\ &\iff x \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-9}{x-\frac{3}{2}}=0 &\iff \begin{cases} 4x^2-9=0 \\ x-\dfrac{3}{2}\neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{3}{2} \\ x\neq \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ &\iff x=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

(b) Un produit de facteur étant nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul,

$$\begin{aligned} t^3-6t^2+12t-8=0 &\iff (t-2)^3=0 \\ &\iff t-2=0 \\ &\iff t=2 \end{aligned}$$

3. (a) On a $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

(b) On a :

$$\begin{aligned} \frac{x^2+4x}{x-3} \geqslant \frac{5x+2}{x-3} &\iff \frac{x^2-x-2}{x-3} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{(x+1)(x-2)}{x-3} \geqslant 0 \end{aligned}$$

d'où, grâce au tableau de signes 1 page suivante :

$$\frac{x^2+4x}{x-3} \geqslant \frac{5x+2}{x-3} \iff x \in [-1,2] \cup]3,+\infty[$$

Exercice 2.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Table 1 – Tableau de signe de $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$	
$f(x)$		-2		$2x$		2	

Table 2 – Expression de $f(x)$ sans valeur absolue

1. Le tableau 2 permet d'exprimer $f(x)$ sans valeur absolue :

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \in \left]-\infty, -1\right[\\ 2x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 2 & \text{si } x \in \left]1, +\infty\right[\end{cases}$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f est représentée à la figure 1 page suivante.

Exercice 3.

1. On a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x (1 + \operatorname{cotan}^2 x) &= \sin^2 x \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Par les formules de l'arc double et fondamentale de la trigonométrie circulaire,

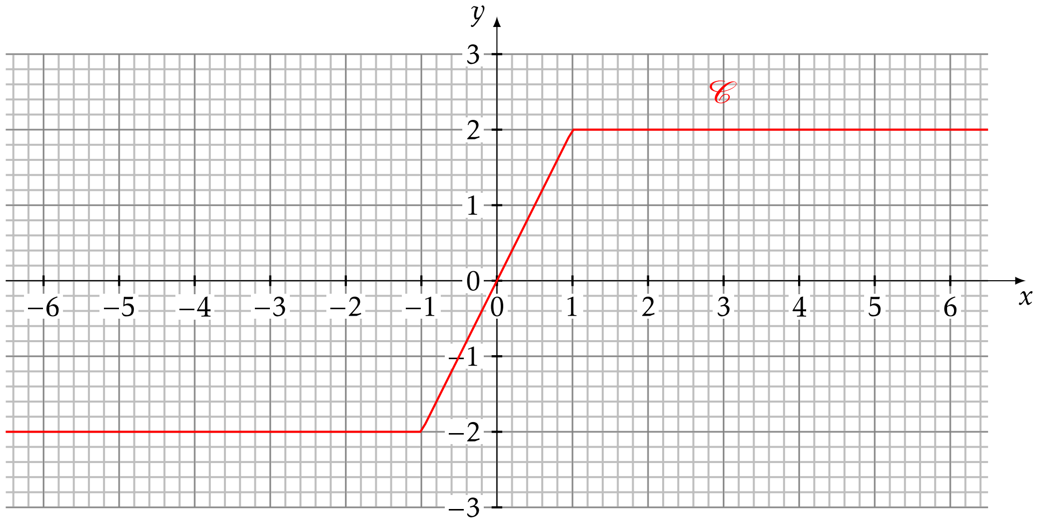

Figure 1 – Courbe de la fonction f

on a :

$$\begin{aligned}(2r\sin\theta\cos\theta)^2 + r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 &= r^2(\sin 2\theta)^2 + r^2(\cos 2\theta)^2\\ &= r^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)\\ &= r^2\end{aligned}$$

3. (a) On sait que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

   (b) On sait en outre que $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Donc

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha)\\ &= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha\\ &= \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\\ &= \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha\\ &= \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\cos\alpha - 2\cos\alpha\left(1 - \cos^2\alpha\right)\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

4. On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ donc

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{1}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{12}\right)\\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{12}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. On a :

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{4} &= \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\\ &= 2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\end{aligned}$$

Or $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc :

$$2\cos^2\frac{\pi}{8}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\left|\cos\frac{\pi}{8}\right| &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Or $0\leqslant\frac{\pi}{8}\leqslant\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{8}\geqslant 0$ si bien que $\left|\cos\frac{\pi}{8}\right|=\cos\frac{\pi}{8}$. Il s'ensuit que

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{8} &= 1-\cos^2\frac{\pi}{8}\\ &= 1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\left|\sin\frac{\pi}{8}\right| &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Or $0 \leqslant \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ si bien que $\left|\sin\frac{\pi}{8}\right| = \sin\frac{\pi}{8}$. Il s'ensuit que

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(b) Par définition :

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{8} &= \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}\\ &= \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}\\ &= \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}\\ &= \frac{\left|2-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$