Exercice 1. On a :

$$\begin{aligned}
\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} &\iff \sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\
&\iff 4x-\frac{\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } 4x-\frac{\pi}{4}\equiv\pi-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\
&\iff 4x\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } 4x\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\\
&\iff 4x\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi] \text{ ou } 4x\equiv\frac{13\pi}{12}\ [2\pi]\\
&\iff x\equiv\frac{5\pi}{48}\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x\equiv\frac{13\pi}{48}\left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. (a) i. Puisque

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} |z_1|=1\\ \operatorname{Arg}(z_1)\equiv\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}$$

ii. On voit aisément géométriquement que

$$\begin{cases} |z_2|=\sqrt{2}\\ \operatorname{Arg}(z_2)\equiv-\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}$$

iii. Puisque $z_3=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}\\ \dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} |z_3|=2\\ \operatorname{Arg}(z_3)\equiv\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases}$$

(b) La question 1a permet d'affirmer que :

$$z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_3=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

(c) i. D'après la question 1b page précédente, on a :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{12}} \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = \sqrt{2} \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \dfrac{5\pi}{12} \ [2\pi] \end{cases}$$

ii. D'après la question 1b page précédente, on a :

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_3} &= \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{5i\pi}{12}} \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_2}{z_3}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{12} \ [2\pi] \end{cases}$$

iii. D'après la question 1b page précédente, on a : donc :

$$\begin{aligned} z_1^7 &= \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^7 \\ &= \mathrm{e}^{\frac{14i\pi}{3}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\mathrm{e}^{\frac{12i\pi}{3}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\mathrm{e}^{2i\pi} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} \\ &= z_1 \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{cases} \left|z_1^7\right| = 1 \\ \operatorname{Arg}\left(z_1^7\right) \equiv \dfrac{2\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$$

(d) i. Cf. cours.

ii. On a

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix}+4\,\mathrm{e}^{3ix}\mathrm{e}^{-ix}+6\,\mathrm{e}^{2ix}\mathrm{e}^{-2ix}+4\,\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{e}^{4ix}+\mathrm{e}^{-4ix}}{2}+4\,\frac{\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{-2ix}}{2}+3\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. On a

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{2+x}{x^2} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=0$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{1+x}-1} &= \frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\
&= \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\cancel{x}} \\
&= \sqrt{1+x}+1 \quad \text{si } x\neq 0
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=2$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-16}{x^3-64} &= \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+16)} \\
&= \frac{x+4}{x^2+4x+16}
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x^3-64}=\frac{1}{6}$$

4. Par croissances comparées (« l'exponentielle l'emportant sur la puissance ») :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = 0$$

5. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(2x^2\right) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2}\right) \\ &= \ln\frac{1}{2} \\ &= -\ln 2\end{aligned}$$

6. On a

$$\frac{2x^3-1}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3-1}{(1+x)(1-x)}$$

Or :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} 2x^3 - 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} 1 + x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 1 - x = 0^+\end{cases}$$

donc, quand $x \to 1^-$, le numérateur de ce quotient tend 1 et le dénominateur tend vers $2 \times 0^+$, c'est-à-dire vers 0^+. Il s'ensuit que $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3-1}{1-x^2} = +\infty$.

7. On remarque que

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

donc, puisque $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$$

8. On a
$$\begin{aligned}\left|\frac{\cos x}{x}\right| &= \frac{|\cos x|}{|x|}\\ &\leqslant \frac{1}{|x|}\\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$
si bien que, par un corollaire du théorème « des gendarmes » :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$$

Exercice 4.

1. (a) On a :
$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)'\\ &= \frac{3x^2\left(x^3-1\right)-\left(x^3+1\right)\times 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}\\ &= -\frac{6x^2}{\left(x^3-1\right)^2}\end{aligned}$$

   (b) D'après le cours :
$$\begin{aligned}f'(x) &= 1+\tan^2 x\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

   (c) On a :
$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)'\\ &= 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

   (d) On a :
$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\\ &= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

   (e) On remarque que, pour tout x réel, $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$.

(f) On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\mathrm{e}^{\cos x})' \\ &= -\sin x\,\mathrm{e}^{\cos x} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x + x\cos x)(1-\cos x) - x\sin x(\sin x)}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x(1-\cos x) + x\cos x - x\cos^2 x - x\sin^2 x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x(1-\cos x) + x\cos x - x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x(1-\cos x) - x(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x - x}{1-\cos x} \end{aligned}$$

Exercice 5.

1. (a) La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. Il s'ensuit que l'ensemble de définition de la fonction ch est $\mathbb{R}$.

   (b) La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. Il s'ensuit que la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) i. L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ de ch est symétrique par rapport à 0.

   ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{ch} x \end{aligned}$$

   iii. Il s'ensuit que ch est une fonction paire qu'il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

   (d) L'ensemble d'étude est $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

   i. En 0, la fonction ch est continue donc :

$$\begin{aligned} \lim_0 \operatorname{ch} &= \operatorname{ch} 0 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-0}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii. La fonction exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et 0 en $-\infty$ donc :

$$\begin{aligned}\lim_{+\infty} \operatorname{ch} x &= \lim_{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{+\infty} e^x + \lim_{-\infty} e^x\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}' x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ &= \operatorname{sh} x\end{aligned}$$

En outre :

$$\operatorname{ch}'' x = (\operatorname{sh} x)' \qquad = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ &= \operatorname{ch} x\end{aligned}$$

(f) Étudions le signe de la dérivée de ch.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}' x > 0 &\iff \operatorname{sh} x > 0 \\ &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \\ &\iff e^x - e^{-x} > 0 \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff e^{2x} > 1 \\ &\iff e^{2x} > e^0 \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0\end{aligned}$$

Donc, sur l'intervalle d'étude $[0, +\infty[$, la fonction ch est strictement croissante (avec $\operatorname{ch}' 0 = 0$).

(g) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de ch.

— La fonction ch étant paire, $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

— Puisque $\operatorname{ch}' 0 = 0$, $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

— On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} 1 &= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} \\
&\sim \frac{\frac{5}{2} + \frac{2}{5}}{2} \\
&= \frac{29}{20} \\
&\sim \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

et, au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}$ admet une tangente de coefficient directeur :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}' 1 &= \operatorname{sh} 1 \\
&= \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \\
&\sim \frac{\frac{5}{2} - \frac{2}{5}}{2} \\
&= \frac{21}{20} \\
&\sim 1
\end{aligned}$$

Tous ces éléments permettent de tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ représentée figure 1 page suivante.

2. (a) Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= e^{-x} e^x \\
&= 1
\end{aligned}$$

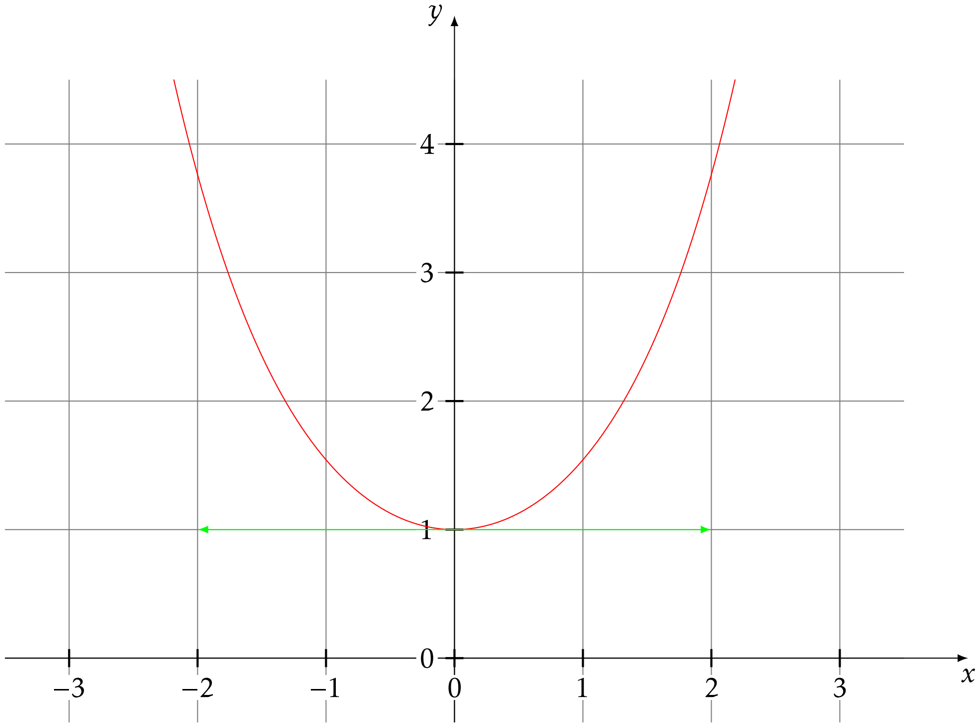

FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction ch

(b) Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}' x &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' \\
&= \frac{\operatorname{sh}' x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} \\
&= \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \\
&= \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} & \text{puisque } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \\ 1 - \operatorname{th}^2 x & \text{en scindant en deux la fraction précédente} \end{cases}
\end{aligned}$$