Exercice 1.

1. On a :

P	Q	P ou Q	P et (P ou Q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Donc P et (P ou Q) a mêmes valeurs de vérité que P donc lui est équivalente.

2. On a :

P	Q	P et Q	(P et Q) ou P
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Donc (P et Q) ou P a mêmes valeurs de vérité que P donc lui est équivalente.

Exercice 2. La relation $P \implies Q$ est équivalente aux phrases 1, 2, 4, 7.

Exercice 3.

1. (a) « Chaque étudiant de l'université étudie au moins une langue » s'écrit :

$$\forall e \in \mathscr{E}, \exists l \in \mathscr{L}, e \top l$$

(b) « Toute langue prévue est effectivement étudiée » s'écrit :

$$\forall l \in \mathscr{L}, \exists e \in \mathscr{E}, e \top l$$

(c) « Tous les étudiants suivent l'enseignement d'une même langue » s'écrit :

$$\exists l \in \mathscr{L}, \forall e \in \mathscr{E}, e \top l$$

(d) « Chaque étudiant suit l'enseignement d'une seule langue » s'écrit :

$$\forall e \in \mathscr{E}, \exists ! l \in \mathscr{L}, e \top l$$

2. (a) $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}$ revient à dire « tout rationnel est le quotient d'un entier relatif par un entier naturel non nul ».

(b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y < x^2$ revient à dire « il exite un réel strictement inférieur au carré de tout réel ».

(c) $\forall x \in]0,1], \exists n \in \mathbb{N}^*, x \geqslant \frac{1}{n}$ revient à dire « tout réel de $]0,1]$ est supérieur à l'inverse d'au moins un entier naturel non nul ».

Exercice 4.

1. La négation de « Tous les étudiants du groupe sont présents » est « Au moins un étudiant du groupe est absent ».
2. La négation de « Aucun magasin n'est ouvert » est « Au moins un magasin est ouvert ».
3. La négation de « Il y a une université située à plus de 4000 m d'altitude » est « Toutes les universités sont situées à au plus 4000 m d'altitude ».
4. La négation de « Il y a *une seule* université située à plus de 4000 m d'altitude » est « Ou bien toutes les universités sont situées à au plus 4000 m d'altitude ou bien au moins deux universités sont situées à plus de 4000 m d'altitude ».

Exercice 5.

1. (a) La contraposée de l'implication « Si l'entier (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair » est « Si l'entier n n'est pas pair alors (n^2-1) est divisible par 8 », c.-à-d. « Si l'entier n est impair alors (n^2-1) est divisible par 8 ».

   (b) Soit n un entier impair n. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Deux cas se présentent :

   i. soit k est pair et il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$; alors :

   $$\begin{aligned} n &= 2k+1 \\ &= 4p+1 \end{aligned}$$

   ii. soit k est impair et il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$; alors :

   $$\begin{aligned} n &= 2k+1 \\ &= 2(2p+1)+1 \\ &= 4p+3 \end{aligned}$$

   Donc n s'écrit sous la forme $n = 4p+r$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1,3\}$.

   (c) Soit n impair. Deux cas se présentent : soit $n = 4p+1$, soit $n = 4p+3$.

   i. Dans le 1er cas :

   $$\begin{aligned} n^2-1 &= (4p+1)^2-1 \\ &= 16p^2+8p+1-1 \\ &= 8p(2p+1) \end{aligned}$$

   Comme p et $2p+1$ sont entiers, n^2-1 est multiple de 8.

   ii. Dans le 2e cas :

   $$\begin{aligned} n^2-1 &= (4p+3)^2-1 \\ &= 16p^2+24p+9-1 \\ &= 8(2p^2+3p+1) \end{aligned}$$

   Comme $2p^2+3p+1$ est entier puisque p l'est, n^2-1 est multiple de 8.

Donc, dans les deux cas, $n^2 - 1$ est multiple de 8, donc divisible par 8. On a donc prouvé la contraposée de la propriété de l'énoncé : si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

(d) On sait qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes donc, puisque la contraposée de la propriété de l'énoncé est vraie, la propriété est elle-même vraie.

2. Pour prouver l'implication $P \implies Q$, il suffit de prouver sa contraposée, c.-à-d. $\overline{Q} \implies \overline{P}$, autrement dit si $a > 0$ alors $\exists \varepsilon > 0$, $a > \varepsilon$.

   Soit a un réel et supposons $\overline{Q}$, c.-à-d. $a > 0$. Pour prouver $\overline{P}$, il suffit d'exhiber un $\varepsilon > 0$ tel que $a > \varepsilon$. Or, un ε qui convient est $\frac{a}{2}$ car :

   — on a $\frac{a}{2} > 0$ puisque $a > 0$;

   — on a $a > \frac{a}{2}$,

   On a donc prouvé $\overline{Q} \implies \overline{P}$, c.-à-d. la contraposée de l'implication $P \implies Q$. Donc $P \implies Q$ est vraie : $(\forall \varepsilon > 0, a \leqslant \varepsilon) \implies a \leqslant 0$.

3. On sait que l'aire $\mathscr{A}$ d'un rectangle est le produit de sa longueur L par sa largeur l où $l \leqslant L$. Prenons comme unité de longueur le mètre (m) et raisonnons par l'absurde en supposant $L < 13$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= L \times l \\
&\leqslant L \times L \quad \text{puisque la largeur est inférieure à la longueur} \\
&< 13^2 \quad \text{puisque } L < 13 \\
&< 169
\end{aligned}$$

   Ceci contredit le fait que le rectangle a pour aire $170\,\mathrm{m}^2$. Donc l'hypothèse $L < 13$ est fausse et donc sa longueur est supérieure à $13\,\mathrm{m}$.