**Exercice 1.** On sait que, par définition, la table de vérité de l'équivalence logique $P \iff Q$ est :

| $P$ | $Q$ | $P \iff Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Par ailleurs, la table de vérité de $\left(\overline{P \text{ et } \overline{Q}} \text{ et } \overline{Q \text{ et } \overline{P}}\right)$ est

| $P$ | $Q$ | $\overline{P}$ | $\overline{Q}$ | $P$ et $\overline{Q}$ | $\overline{P \text{ et } \overline{Q}}$ | $Q$ et $\overline{P}$ | $\overline{Q \text{ et } \overline{P}}$ | $\overline{P \text{ et } \overline{Q}}$ et $\overline{Q \text{ et } \overline{P}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V | F | V | V |
| V | F | F | V | V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | F | V | F | V | V |

Leurs tables de vérité étant identiques, les propositions $(P \iff Q)$ et $\left(\overline{P \text{ et } \overline{Q}} \text{ et } \overline{Q \text{ et } \overline{P}}\right)$ sont équivalentes.

**Exercice 2.**

1. On a :
   (a) $\overline{x > 0} \iff x \leqslant 0$.
   (b) $\overline{-3 \leqslant x \text{ ou } x < 3} \iff (-3 > x \text{ et } x \geqslant 3) \iff x \in \varnothing$.
   (c) La négation de « Aucune des boules contenues dans l'urne n'est rouge. » est « Il existe une boule contenue dans l'urne qui est rouge. »
   (d) La proposition « Il existe un entier $x$ tel que, pour tout entier $y$, il existe un entier $z$ tel que $(z < y) \implies (z < x+1)$. » s'écrit

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, ((z < y) \implies (z < x+1))$$

   Sa négation est donc :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, \left((z < y) \text{ et } (\overline{z < x+1})\right)$$

   autrement dit « Pour tout un entier $x$, il existe un entier $y$ tel que, pour tout entier $z$ on a, $(z < y)$ et $(z \geqslant x+1)$. »

2. Une fonction $f$ d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ n'est pas impaire si et seulement si :

$$\exists x \in \mathscr{D}_f, (-x \notin \mathscr{D}_f \text{ ou } f(-x) \neq -f(x))$$

**Exercice 3.**

1. L'implication $x > 8 \implies x > 3$ a pour :

**contraposée :** $x \leqslant 3 \implies x \leqslant 8$.

**négation :** $x > 8$ et $x \leqslant 3$.

**réciproque :** $x > 3 \implies x > 8$.

2. On a :

$$\begin{aligned}(x-1)^3 = x^3 + 3x^2 - 3x - 1 &\iff x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \\ &\iff 6x^2 - 6x = 0 \\ &\iff 6x(x-1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

Donc $\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)^3 \neq x^3 + 3x^2 - 3x - 1$.

3. (a) L'implication $(n \geqslant 5) \implies (n > 3)$ est vraie car si un entier est au moins égal à 5, il dépasse 3.

   (b) L'implication $(n \geqslant 5) \implies (n > 6)$ est fausse car $n = 5$ satisfait $(n \geqslant 5)$ mais ne satisfait pas $(n > 6)$.

   (c) L'implication $(n \geqslant 5) \implies (n \leqslant 6)$ est fausse car $n = 7$ satisfait $(n \geqslant 5)$ mais ne satisfait pas $(n \leqslant 6)$.

   (d) L'implication $(n < 2) \implies (n^2 = n)$ est vraie car, $n$ étant un entier naturel, il est positif donc $(n < 2) \implies (n = 0 \text{ ou } n = 1)$ et, pour ces deux entiers, il est vrai que $n^2 = n$.

   (e) L'implication $(n < 1) \implies (2 \text{ divise } n)$ est vraie car, $n$ étant un entier naturel, il est positif donc $(n < 1) \implies n = 0$ et 2 divise 0.

   (f) L'implication $(n < 1) \implies (n \text{ divise } 2)$ est fausse car, $n$ étant un entier naturel, il est positif donc $(n < 1) \implies n = 0$ et $n = 0$ ne divise aucun nombre, en particulier pas 2.

**Exercice 4.**

1. On introduit les propositions $P$, $Q$ et $R$ qui représentent le fait que Pauline ($P$), Quentin ($Q$) et Romane ($R$) prennent un dessert. Les données du problème se traduisent ainsi :

   (a) $P \implies Q$

   (b) $(Q \text{ et } \overline{R})$ ou $(\overline{Q} \text{ et } R)$

   (c) $P$ ou $R$

   (d) $R \implies P$

2. La table de vérité suivante permet de modéliser tous les cas possibles :

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \implies Q$ | $(Q$ et $\overline{R})$ ou $(\overline{Q}$ et $R)$ | $P$ ou $R$ | $R \implies P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | V | F | V | V | V |
| V | F | F | F | F | V | V |
| F | V | V | V | F | V | F |
| F | V | F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V | V | F |
| F | F | F | V | F | F | V |

La seule interprétation qui rend vraies les quatre affirmations correspond à la 2e ligne dans laquelle Pauline et Quentin commandent un dessert mais pas Romane.

3. Si l'une des quatre affirmations est supprimée, on ne peut savoir qui prend un dessert car, dans chaque cas, plus d'une ligne (en fait deux) ne contient que des valeurs « vrai ».

**Exercice 5.** Soit $m$, $n$, $p$ trois entiers naturels et :

— $P$ la proposition $m^2 + n^2 = p^2$ ;

— $Q$ la proposition « Au moins un des trois nombres, $m$, $n$ ou $p$ est pair. »

L'assertion est l'implication $P \implies Q$ et, pour la prouver, il suffit de prouver sa contraposée qui est $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

Supposons $\overline{Q}$ vraie. Alors les trois entiers $m$, $n$ et $p$ sont impairs, *i.e.* il existe trois entiers $m'$, $n'$ et $p'$ tels que $m = 2m' + 1$, $n = 2n' + 1$ et $p = 2p' + 1$. On en déduit

1. que :

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= (2m'+1)^2 + (2n'+1)^2 \\ &= 4m'^2 + 4m' + 1 + 4n'^2 + 4n' + 1 \\ &= 2\left(2m'^2 + 2m' + 2n'^2 + 2n' + 1\right) \end{aligned}$$

donc que $m^2 + n^2$ est pair ;

2. que :

$$\begin{aligned} p^2 &= (2p'+1)^2 \\ &= 4p'^2 + 4p' + 1 \\ &= 2\left(2p'^2 + 2p'\right) + 1 \end{aligned}$$

donc que $p^2$ est impair.

Mais, si $m^2 + n^2$ est pair et $p^2$ impair, alors on ne peut avoir $m^2 + n^2 = p^2$ donc $P$ est fausse *i.e.* $\overline{P}$ vraie.

On vient donc d'établir que $\overline{Q} \implies \overline{P}$, c'est-à-dire $P \implies Q$, soit « Si $m^2 + n^2 = p^2$, il y a toujours au moins un des trois nombres, $m$, $n$ ou $p$ qui est pair ».