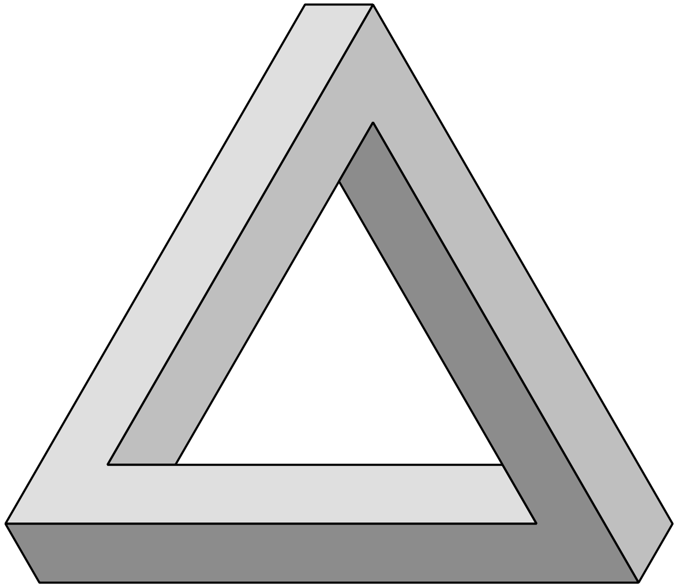
Recueil d'exercices de mathématiques



Denis Bitouzé

Table des matières

I Énoncés **1**
I.1 Logique 1
I.2 Raisonnement par récurrence 4
I.3 Calcul matriciel 4
I.4 Fonctions de plusieurs variables 5
I.5 Différentielles et formes différentielles 8

II Corrigés **10**
II.1 Logique 10
II.2 Raisonnement par récurrence 17
II.3 Calcul matriciel 17
II.4 Fonctions de plusieurs variables 19
II.5 Différentielles et formes différentielles 19

Chapitre I

Énoncés

I.1 Logique

Exercice 1.1
Écrire les tables de vérité suivantes :

1. « P et Q »
2. « $\overline{P \text{ et } Q}$ »
3. « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ »
4. « $\overline{P}$ ou Q »

Exercice 1.2

1. Écrire les tables de vérité de
   (a) « (P et Q) ou R »
   (b) « P et (Q ou R) »
2. Qu'en déduit-on ?
3. Que peut-on dire de la proposition « P et Q ou R » ? Donner un exemple concret illustrant ce que l'on peut en dire.

Exercice 1.3
Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque (on ne demande pas de prouver la véracité) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x = 3 \implies x^2 = 9$
3. Si on est en décembre alors les vacances de Noël sont proches.

Exercice 1.4
S'il pleut au moment où il part au travail, Jean y va en bus.

1. Hier Jean est allé au travail à vélo. Est-il possible d'établir avec certitude si hier il pleuvait au moment où il partait au travail ?
2. Ce matin Jean est allé au travail en bus. Est-il possible d'établir avec certitude si ce matin il pleuvait au moment où il partait au travail ?

Exercice 1.5
Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : « Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas. » Franchiriez-vous cette porte ?

Exercice 1.6
Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses [1].

1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$
2. Cléopâtre était chinoise ou les grenouilles aboient.
3. Les roses sont des animaux ou les chiens ont 4 pattes.
4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
5. Paris est en France ou Madrid est en Chine.

1. Attention : dans le langage courant la proposition « soit P soit Q » se traduit par un « ou » exclusif au lieu du « ou » logique.

6. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
7. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.
8. $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 4)$
9. $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$
10. $(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$
11. $(2 < 3)$ et $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$
12. $\overline{(2 < 3)}$ ou $(2 \text{ divise } 5)$

Exercice 1.7
La relation $p \implies q$ se lit « si p, alors q ». Parmi les phrases suivantes, lesquelles lui sont équivalentes ?

1. p est une condition suffisante de q.
2. q est une condition nécessaire de p.
3. pour que q, il suffit que p.
4. pour que p, il est nécessaire que q.
5. p seulement si q.
6. pour que p, il suffit que q.
7. q seulement si p

Exercice 1.8 (M)
Soit :

— $\mathscr{U}$ l'ensemble des étudiants de l'ULCO ;
— $\mathscr{G}$ l'ensemble des étudiants du département GTE de Dunkerque ;
— $\mathscr{C}$ l'ensemble de tous les contrôles passés par tous les étudiants de l'ULCO ;
— $N(c,e)$ la note obtenue par l'étudiant e au contrôle c ;

et soit les assertions suivantes :

(A_1) Tout étudiant de $\mathscr{U}$ est étudiant de $\mathscr{G}$.
(A_2) Tout étudiant de $\mathscr{G}$ est étudiant de $\mathscr{U}$.
(A_3) Tous les étudiants de $\mathscr{G}$ ont eu la note 0 à tous leurs contrôles.
(A_4) Tous les étudiants de $\mathscr{G}$ ont eu la note 0 à un de leurs contrôles.
(A_5) Un étudiant de $\mathscr{G}$ a eu la note 20 à tous ses contrôles.
(A_6) Un étudiant de $\mathscr{G}$ a eu la note 20 à un de ses contrôles.

Pour chacune d'elles :

1. indiquer si elle est vraie ou fausse ;
2. donner sa négation ;
3. la formuler mathématiquement ;
4. formuler mathématiquement sa négation.

Exercice 1.9 (M)
Soient les 5 assertions suivantes :

(A_1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
(A_2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
(A_3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
(A_4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
(A_5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

1. Les assertions (A_1) à (A_5) sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 1.10 (M)
Compléter les pointillés par l'un des connecteurs logiques $\iff$, $\implies$, $\impliedby$ de sorte que les assertions suivantes soient vraies :

(A_1) $(x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = 4) \cdots (x = 2)$

(A_2) $(z \in \mathbb{C}$ et $z = \bar{z}) \cdots (z \in \mathbb{R})$

(A_3) $(x = \pi) \cdots (\cos x = -1)$

Exercice 1.11
On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant : « Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression. ».

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : « quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue. ». Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Exercice 1.12 (M)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 1$.
2. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.
3. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 1.13 (M)
Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g ;
14. f tend vers 3 en 0 ;
15. g ne tend pas vers 3 en 0.

Exercice 1.14
On considère les propositions suivantes

1. « les éléphants portent toujours des pantalons courts » ;
2. « si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse » ;
3. « si un animal est facile à avaler alors il mange du miel » ;
4. « si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse ».

On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Exercice 1.15
On considère des entiers naturels a et b. Prouver que l'assertion suivante est vraie :

$$\sqrt{ab} \neq \frac{a+b}{2} \implies a \neq b$$

I.2 Raisonnement par récurrence

Exercice 2.1 (F)
Prouver que les propositions suivantes sont vraies.

1. Soit $q \in \mathbb{R} - \{1\}$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
2. Pour tout $n \geqslant 0$, $2^n \geqslant n+1$.
3. Pour tout $n \geqslant 0$, $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

Exercice 2.2 (M)
Prouver que la somme des carrés des n premiers entiers > 0 égale $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2.3 (M)
Déterminer la somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 2.4 (M)
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k$$
$$C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

1. Calculer S_n et C_n pour les entiers 1, 2, 3, 4, 5. Que peut-on conjecturer ?
2. Déterminer la somme des cubes des n premiers entiers.

Exercice 2.5 (D)
Soit la propriété P_n : $\quad 2^n \geqslant n^2$.

1. La propriété P_n est-elle vraie pour les entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5 ?
2. Prouver que, pour tout $n \neq 3$, P_n est vraie.

I.3 Calcul matriciel

Exercice 3.1 (F)
Calculer les produits matriciels suivants.

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Pour a, b et c trois réels quelconques :
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3.2 (F)
Soit A et B les matrices définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, BA, A^2, B^2, $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$, $A^2 + B^2 + 2AB$, $(A+B)^2$.

Exercice 3.3 (M)
On considère les matrices A, B et C définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Prouver que $AB = AC$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3.4 (M)
Soit α un réel et R_α la matrice rotation définie par :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Calculer R_α^2, R_α^3 puis en déduire une formule pour R_α^n ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 3.5
Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer ${}^tA$, $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$.

Exercice 3.6
Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, A^3, A^4 et A^5.

Exercice 3.7

1. Trouver les matrices qui commutent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Même question si :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3.8
Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

I.4 Fonctions de plusieurs variables

Exercice 4.1 (M)
Préciser et représenter graphiquement dans le plan les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f : (x,y) \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $U : (s,t) \mapsto \sqrt{6-(2s+3t)}$
3. $L : (\omega,\varphi) \mapsto \operatorname{Arcsin}(\omega + 2\varphi)$
4. $R : (\rho,\theta) \mapsto \ln\left(\frac{16-\rho^2-\theta^2}{\rho^2+\theta^2-4}\right)$
5. $A : (I,t) \mapsto \ln\frac{I+t}{I-t}$
6. $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2-y}$

Exercice 4.2 (M)
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les ensembles de définition et de continuité de la fonction f.

Exercice 4.3 (M)
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la continuité en 0 des fonctions $\phi_1 : x \mapsto f(x,0)$, $\phi_2 : y \mapsto f(0,y)$ et en $(0,0)$ de la fonction f.

Exercice 4.4 (M)
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$?
2. Prouver que f est partiellement dérivable en $(0,0)$.

Exercice 4.5 (M)
Prouver que la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 4.6 (F)
On pose $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$.

1. Calculer, pour tous x et y réels et $h \neq 0$,
$$\varphi_1(x,y,h) = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
et
$$\varphi_2(x,y,h) = \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$
2. Calculer, pour tous x et y réels, $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$.

Exercice 4.7 (M)
Après en avoir précisé les ensembles de définition, calculer les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 des fonctions suivantes.

1. $f : (x,y) \mapsto xy$
2. $R : (\rho,\theta) \mapsto \ln(\rho\theta)$
3. $U : (s,t) \mapsto s^t$
4. $L : (\omega,\varphi) \mapsto \operatorname{Arcsin}(\varphi/\omega)$
5. $A : (I,t) \mapsto \ln \frac{1}{\sqrt{I^2+t^2}}$
6. $f : (x,y) \mapsto \sqrt[3]{x^2+y^2}$

Exercice 4.8 (M)
La pression P (en kPa), le volume V (en L) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation $PV = RT$ avec R constante. Montrer que :

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

et que :

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = R$$

Exercice 4.9 (M)
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si son laplacien Δf, défini par

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} f''_{x_k^2},$$

est nul. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont harmoniques.

1. $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$
2. $R : (\rho,\theta) \mapsto \ln(\rho\theta)$
3. $U : (s,t) \mapsto e^s \sin t$
4. $f : (x,y,z) \mapsto \left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Exercice 4.10 (M)
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer, au point $(1,1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Exercice 4.11 (M)
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 5x - 2y + 9$$

1. Calculer les dérivées premières et secondes de f.
2. On se propose de chercher si f présente un extremum.
   (a) Soit (x_0,y_0) un point de $\mathbb{R}^2$ et φ_1 et φ_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_1(x) = f(x,y_0)$ et $\varphi_2(y) = f(x_0,y)$. Prouver, en étudiant φ_1 et φ_2, que si (x_0,y_0) correspond à un extremum alors $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$.
   (b) Résoudre le système

   $$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0,y_0) &= 0 \end{cases}$$

   et calculer f en le couple solution obtenu.
   (c) Soit h et k des réels et (x_0,y_0) le couple solution obtenu à la question2b.
      i. Calculer $f(x_0+h, y_0+k)$.
      ii. En posant $u = h/k$ pour $k \neq 0$, prouver que $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$.
      iii. Quelle est la nature du point $f(x_0,y_0)$ pour f ?

Exercice 4.12 (M)
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

1. Calculer les dérivées premières et secondes de f.
2. Résoudre le système

   $$\begin{cases} f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0 \end{cases}$$

   et calculer f en le couple solution obtenu.
3. En factorisant $f(x,y)$, étudier le signe de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Quelle est la nature du point $f(x,y)$, obtenu à la question2 pour f ?

Exercice 4.13 (F)
Calculer la dérivée de la fonction g dans les cas suivants.

1. $g(t) = f(x(t), y(t))$ où :
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$;
   (b) $x(t) = \sin t$;
   (c) $y(t) = e^t$;
2. $g(t) = f(x(t), y(t))$ où :
   (a) $f(x,y) = \cos(x + 4y)$;
   (b) $x(t) = 5t^4$;
   (c) $y(t) = \frac{1}{t}$;
3. $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ où :
   (a) $f(x,y,z) = xe^{\frac{y}{z}}$;
   (b) $x(t) = t^2$;
   (c) $y(t) = 1 - t$;
   (d) $z(t) = 1 + 2t$;
4. $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ où :
   (a) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
   (b) $x(t) = \sin t$;
   (c) $y(t) = \cos t$;
   (d) $z(t) = \tan t$.

Exercice 4.14 (M)
La pression P (en kPa), le volume V (en L) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation $PV = RT$ avec $R = 8{,}31$. Déterminer une valeur approchée de la vitesse à laquelle la pression change quand la température est de 300 K et est en train d'augmenter à raison de 0,1 K/s et quand le volume est de 100 L et est en train de croître à raison de 0,2 L/s.

Exercice 4.15 (F)
Calculer les différentielles des fonctions suivantes.

1. $f : (x,y) \mapsto x^5y^3$;
2. $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + 3y^2}$;
3. $R : (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha\beta^2 \cos\gamma$;
4. $T : (u,v,w) \mapsto \frac{v}{1+uvw}$;
5. $L : (x,y,z) \mapsto xze^{-y^2-z^2}$.

Exercice 4.16 (M)
Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 4.17 (M)
Une boîte rectangulaire ouverte au-dessus doit occuper un volume de 32 m^3. Quelles doivent être ses dimensions pour que sa surface totale soit minimum ?

Exercice 4.18 (D)
En étudiant le signe de $\left(f''_{xy}\right)^2 - f''_x f''_y$ calculé aux points critiques, déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$.

I.5 Différentielles et formes différentielles

Exercice 5.1 (F)
On pose

$$f_1 : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f_2 : (x,y,z) \mapsto \ln(x^2 + y^2 - z^2)$$
$$f_3 : (x,y) \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy}$$
$$f_4 : (x,y) \mapsto x^2 e^{y/x}$$

1. Calculer les différentielles de f_1, f_2, f_3 et f_4.

2. Spécifier $\mathrm{d}f_1(3,1)$ et $\mathrm{d}f_2(4,-1,2)$.
3. Calculer $\mathrm{d}f_4(1,-1)(3,6)$.

Exercice 5.2 (F)
Pour $x = 1$, $y = 1$, $\mathrm{d}x = 10^{-2}$ et $\mathrm{d}y = 2\times 10^{-2}$, comparer $\mathrm{d}f$ et l'accroissement Δf de f dans les deux cas suivants :

$$f : (x,y) \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$$

et

$$f : (x,y) \mapsto \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$$

Exercice 5.3 (M)

1. Déterminer le réel α de sorte que la forme différentielle

$$\omega = \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

soit exacte.

2. Prouver que les formes différentielles suivantes sont exactes et déterminer les fonctions dont elles sont les différentielles.

$$\omega_1 = \frac{1}{y^3}\left((3x^2+y^2)y\,\mathrm{d}x - 2x^3\,\mathrm{d}y\right)$$
$$\omega_2 = \left(3x^2y+2x+y^3\right)\mathrm{d}x + \left(x^3+3xy^2-2y\right)\mathrm{d}y$$
$$\omega_3 = \frac{1}{xyz}\left(\frac{y+z}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{z+x}{y}\,\mathrm{d}y + \frac{x+y}{z}\,\mathrm{d}z\right)$$

Chapitre II

Corrigés

II.1 Logique

Exercice 1.1
On a :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$ et Q	$\overline{P}$ ou Q	P et Q	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P}$ ou $\overline{Q}$
V	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V

Exercice 1.2

1. On a :

P	Q	R	P et Q	P et Q	(P et Q) ou R	P et (Q ou R)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F

2. Les propositions « (P et Q) ou R » et « P et (Q ou R) » ne sont pas équivalentes.
3. La proposition « P et Q ou R » est ambiguë.
4. Soit :

— P : « Avoir une moyenne générale supérieure ou égale à 10/20. »
— Q : « être gentil avec son professeur de mathématiques. »
— R : « Avoir dans chaque unité d'enseignement une moyenne générale supérieure ou égale à 8/20. »

Avoir son semestre en IUT GTE sur l'un ou l'autre des critères :

— « (P et Q) ou R » ;
— « P et (Q ou R) » ;

n'est pas vraiment la même chose.

Exercice 1.3
On a :

1. **proposition elle-même :** $x \leqslant 3$ ou $x > 2$

   contraposée : $x \leqslant 2 \implies x \leqslant 3$

   négation : $x > 3$ et $x \leqslant 2$

   réciproque : $x > 2 \implies x > 3$
2. **proposition elle-même :** $x \neq 3$ ou $x^2 = 9$

   contraposée : $x^2 \neq 9 \implies x \neq 3$

   négation : $x = 3$ et $x^2 \neq 9$

   réciproque : $x^2 = 9 \implies x = 3$
3. **proposition :** On n'est pas en décembre ou les vacances de Noël sont proches.

   contraposée : Si les vacances de Noël ne sont pas proches alors on n'est pas en décembre.

   négation : On est en décembre et les vacances de Noël ne sont pas proches.

   réciproque : Si les vacances de Noël sont proches alors on est en décembre.

Exercice 1.4
Soit P = « Il pleut » et Q = « Jean va au travail en bus ». On a $P \implies Q$, ce qui équivaut à $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

1. Hier Jean est allé au travail à vélo, donc hier on est dans le cas $\overline{Q}$, ce qui implique $\overline{P}$, autrement dit hier il ne pleuvait pas.
2. Ce matin Jean est allé au travail en bus, ce qui correspond à Q, ce qui n'implique rien sur la véracité de P : il n'est pas possible d'établir si ce matin il pleuvait ou pas.

Exercice 1.5
Soit P = « Aboyer » et Q = « Ne pas mordre ». On a $P \implies Q$, ce qui équivaut à $\overline{Q} \implies \overline{P}$: « Chien qui mord, n'aboie pas. » « Notre chien n'aboie pas » correspond à $\overline{P}$, ce qui n'implique rien sur la véracité de Q : il n'est pas possible d'établir si le chien mord ou pas.

Exercice 1.6

1. Il s'agit de l'implication $P \implies Q$ (logiquement équivalente à $\overline{P}$ ou Q) où :
   — P = « Napoléon était chinois. »
   — Q = « $3 - 2 = 2$. »

   Puisque P est fausse, $\overline{P}$ est vraie, par conséquent l'implication est vraie.
2. Il s'agit de la proposition P ou Q où :
   — P = « Cléopâtre était chinoise. »
   — Q = « les grenouilles aboient. »

   Puisque P est fausse et Q est fausse, la proposition est fausse.
3. Il s'agit de la proposition P ou Q où :
   — P = « les roses sont des animaux. »
   — Q = « les chiens ont 4 pattes. »

   Puisque Q est vraie, la proposition est vraie.
4. Il s'agit de l'implication $P \implies Q$ (logiquement équivalente à $\overline{P}$ ou Q) où :
   — P = « l'homme est un quadrupède. »
   — Q = « l'homme parle. »

   Puisque P est fausse, $\overline{P}$ est vraie, par conséquent l'implication est vraie.
5. Il s'agit de la proposition P ou Q où :
   — P = « Paris est en France. »
   — Q = « Madrid est en Chine. »

   Puisque P est vraie, la proposition est vraie.
6. Il s'agit de la double implication $P \iff Q$ (logiquement équivalente à ($P \implies Q$) et ($Q \implies P$)) où :
   — P = « La pierre ponce est un homme. »
   — Q = « les femmes sont des sardines. »

   Puisque P et Q sont fausses, la proposition est vraie.
7. Il s'agit de la proposition P et Q où :

   — P = « Les poiriers ne donnent pas de melons. »
   — Q = « Cléopâtre n'est pas chinoise. »

   Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.

8. Il s'agit de la proposition P et Q où :
   — P = « $2 < 3$. »
   — Q = « 2 divise 4. »

   Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.
9. Il s'agit de la proposition P et Q où :
   — P = « $2 < 3$. »
   — Q = « 2 divise 5. »

   Puisque Q est fausse, la proposition est fausse.
10. Il s'agit de la proposition P ou Q où :
    — P = « $2 < 3$. »
    — Q = « 2 divise 5. »

    Puisque P est vraie, la proposition est vraie.
11. Il s'agit de la proposition P et Q où :
    — P = « $2 < 3$. »
    — Q = « $\overline{\text{2 divise 5}}$. »

    Puisque P et Q sont vraies, la proposition est vraie.
12. Il s'agit de la proposition P ou Q où :
    — P = « $\overline{2 < 3}$. »
    — Q = « 2 divise 5. »

    Puisque P et Q sont fausses, la proposition est fausse.

Exercice 1.7

1. « p est une condition suffisante de q » équivaut à $p \implies q$.
2. « q est une condition nécessaire de p » équivaut à $p \implies q$.
3. « pour que q, il suffit que p » équivaut à $p \implies q$.
4. « pour que p, il est nécessaire que q » équivaut à $p \implies q$.
5. « p seulement si q » équivaut à $p \implies q$.
6. « pour que p, il suffit que q » n'équivaut pas à $p \implies q$.
7. « q seulement si p » n'équivaut pas à $p \implies q$.

Exercice 1.8

1. (a) (A_1) est fausse.
   (b) $(\overline{A_1})$ Il existe un étudiant de $\mathscr{U}$ qui n'est pas étudiant de $\mathscr{G}$.
   (c) $(A_1) \iff (\forall e \in \mathscr{U}, e \in \mathscr{G})$. Formulation équivalente : $(A_1) \iff (e \in \mathscr{U} \implies e \in \mathscr{G})$.
   (d) $(\overline{A_1}) \iff (\exists e \in \mathscr{U}, e \notin \mathscr{G})$.
2. (a) (A_2) est vraie.
   (b) $(\overline{A_2})$ Il existe un étudiant de $\mathscr{G}$ qui n'est pas étudiant de $\mathscr{U}$.
   (c) $(A_2) \iff (\forall e \in \mathscr{G}, e \in \mathscr{U})$. Formulation équivalente : $(A_2) \iff (e \in \mathscr{G} \implies e \in \mathscr{U})$.
   (d) $(\overline{A_2}) \iff (\exists e \in \mathscr{G}, e \notin \mathscr{U})$.
3. (a) (A_3) est fausse.
   (b) $(\overline{A_3})$ Il existe un étudiant de $\mathscr{G}$ qui a eu une note différente de 0 à l'un de ses contrôles.
   (c) $(A_3) \iff (\forall e \in \mathscr{G}, \forall c \in \mathscr{C}, N(c,e) = 0)$. Formulation équivalente : $(A_3) \iff (e \in \mathscr{G} \implies \forall c \in \mathscr{C}, N(c,e) = 0)$.
   (d) $(\overline{A_3}) \iff (\exists e \in \mathscr{G}, \exists c \in \mathscr{C}, N(c,e) \neq 0)$.
4. (a) (A_4) est fausse.
   (b) $(\overline{A_4})$ Il existe un étudiant de $\mathscr{G}$ qui a eu une note différente de 0 à chacun de ses contrôles.
   (c) $(A_4) \iff (\forall e \in \mathscr{G}, \exists c \in \mathscr{C}, N(c,e) = 0)$. Formulation équivalente : $(A_4) \iff (e \in \mathscr{G} \implies \exists c \in \mathscr{C}, N(c,e) = 0)$.
   (d) $(\overline{A_4}) \iff (\exists e \in \mathscr{G}, \forall c \in \mathscr{C}, N(c,e) \neq 0)$.
5. (a) (A_5) est fausse (hélas !).
   (b) $(\overline{A_5})$ Tout étudiant de $\mathscr{G}$ a eu une note différente de 20 à l'un de ses contrôles.
   (c) $(A_5) \iff (\exists e \in \mathscr{G}, \forall c \in \mathscr{C}, N(c,e) = 20)$.
   (d) $(\overline{A_5}) \iff (\forall e \in \mathscr{G}, \exists c \in \mathscr{C}, N(c,e) \neq 20)$.
6. (a) (A_6) est vraie (heureusement !).
   (b) $(\overline{A_6})$ Tout étudiant de $\mathscr{G}$ a eu une note différente de 20 à chacun de ses contrôles.
   (c) $(A_6) \iff (\exists e \in \mathscr{G}, \exists c \in \mathscr{C}, N(c,e) = 20)$.
   (d) $(\overline{A_6}) \iff (\forall e \in \mathscr{G}, \forall c \in \mathscr{C}, N(c,e) \neq 20)$.

Exercice 1.9

1. (a) (A_1) est fausse car $(\overline{A_1})$ est vraie.
   (b) $(\overline{A_1})$ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$ est vraie (il suffit de prendre $y=-x-1$).
2. (a) (A_2) est fausse car $(\overline{A_2})$ est vraie.
   (b) $(\overline{A_2})$ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$ est vraie (il suffit de prendre $x=y=-1$).
3. (a) (A_3) est vraie (il suffit de prendre $y=-x+1$).
   (b) $(\overline{A_3})$ $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$ est (donc) fausse.
4. (a) (A_4) est vraie (il suffit de prendre $x=y=1$).
   (b) $(\overline{A_4})$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$ est (donc) fausse.
5. (a) (A_5) est vraie (il suffit de prendre $x=-1$).
   (b) $(\overline{A_5})$ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leqslant x$ est (donc) fausse.

Exercice 1.10

1. $(x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 = 4) \Longleftarrow (x=2)$
2. $(z \in \mathbb{C} \text{ et } z = \bar{z}) \Longleftrightarrow (z \in \mathbb{R})$
3. $(x=\pi) \Longrightarrow (\cos x = -1)$

Exercice 1.11
Soit P = « Le volume du gaz est constant. » et Q = « La température du gaz est une fonction croissante de la pression. ». Le principe est donc « $P \Longrightarrow Q$ ».

1. (a) La contraposée de « $P \Longrightarrow Q$ » est « $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ ». On obtient donc comme contraposée : « Si la température du gaz n'est pas une fonction croissante de la pression alors le volume du gaz n'est pas constant. »

   Remarque II.1.1
   Cette contraposée est logiquement équivalente au principe donné dans l'énoncé.

   (b) La négation de « $P \Longrightarrow Q$ », *i.e.* de « $\overline{P}$ ou Q », est « P et $\overline{Q}$ ». On obtient donc comme négation : « Le volume du gaz est constant et la température du gaz n'est pas une fonction croissante de la pression. »

   Remarque II.1.2
   Cette négation est vraie lorsque la proposition initiale est fausse et elle est fausse lorsque la proposition initiale est vraie.

2. Cette proposition correspond à « P et $\overline{Q}$ » donc on peut déduire qu'il n'est pas un gaz parfait.

Exercice 1.12

1. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$.
3. La proposition de départ s'écrit mathématiquement :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \implies f(x) > f(y)$$

Donc sa négation s'écrit mathématiquement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \not\Longrightarrow f(x) > f(y)$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \text{ et } f(x) \leqslant f(y)$$

i.e., en langage naturel : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$. ».

Exercice 1.13
Soit $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ les ensembles de définition de f et g.

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$
2. $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x) \leqslant M$
3. $\left(\forall x \in \mathscr{D}_f, (-x) \in \mathscr{D}_f\right)$ et $\left(\forall x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = f(x)\right)$
4. $\left(\forall x \in \mathscr{D}_f, (-x) \in \mathscr{D}_f\right)$ et $\left(\forall x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = -f(x)\right)$
5. $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x) \neq 0$
6. $\exists T \in \mathbb{R}^+, \left(\forall x \in \mathscr{D}_f, x + T \in \mathscr{D}_f\right)$ et $\left(\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x+T) = f(x)\right)$
7. $\forall (a,b) \in \mathscr{D}_f^2, a \neq b \implies \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$
8. $\forall (a,b) \in \mathscr{D}_f^2, a \neq b \implies \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$
9. $\exists x \in \mathscr{D}_f, f(x) \neq 0$
10. $\forall (a,b) \in \mathscr{D}_f^2, a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$
11. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathscr{D}_f, f(x) = n$
12. $\forall x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g, f(x) \leqslant g(x)$

13. $\exists x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g, f(x) > g(x)$
14. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x-0| < \alpha \implies |f(x)-3| < \varepsilon$
15. $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, |x-0| < \alpha$ et $|f(x)-3| \geqslant \varepsilon$

Exercice 1.14
Soit A = « Porter des pantalons courts », B = « Manger du miel », C = « Pouvoir jouer de la cornemuse », D = « Être facile à avaler ».

Les propositions données se formalisent comme suit :

1. $\forall$ éléphants, D ;
2. $B \implies C$ (logiquement équivalente à $\overline{C} \implies \overline{B}$) ;
3. $D \implies B$ (logiquement équivalente à $\overline{B} \implies \overline{D}$) ;
4. $A \implies \overline{C}$;

et on veut savoir s'il est vrai que « $\forall$ éléphants, D ».

Les quatre propositions étant vraies, on a la chaîne d'implications $A \implies \overline{C} \implies \overline{B} \implies \overline{D}$, c'est-à-dire « Si un animal porte des pantalons courts alors il n'est pas facile à avaler ». Étant donné que les éléphants portent toujours des pantalons courts, cela signifie « $\forall$ éléphants, $\overline{D}$ » : la déduction est fausse.

Exercice 1.15
Il suffit de raisonner par contraposée.

II.2 Raisonnement par récurrence

II.3 Calcul matriciel

Exercice 3.1
On a

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ca+b^2 \\ a+b+c & 2ca+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Exercice 3.2

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3

$R_\alpha^2 = R_{2\alpha}$, $R_\alpha^3 = R_{3\alpha}$ et on peut prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.

Exercice 3.4

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} $$

$$ A\,{}^tA = 52 $$

$$ {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 16 & 24 \\ 6 & 24 & 36 \end{pmatrix} $$

Exercice 3.5

Exercice 3.6

Exercice 3.7

II.4 Fonctions de plusieurs variables

Exercice 4.1

1. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ($\mathscr{D}_f$ est le plan privé de l'origine).
2. $\mathscr{D}_U = \mathbb{R}^2 - \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 / 2s + 3t - 6 = 0\right\}$ ($\mathscr{D}_f$ est le plan privé de la droite d'équation $2s + 3t - 6 = 0$).
3. $\mathscr{D}_L = \left\{(\omega,\varphi) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leqslant \omega + 2\varphi \leqslant 1\right\}$ ($\mathscr{D}_f$ est la zone du plan située entre les deux droites d'équations respectives $\omega + 2\varphi = -1$ et $\omega + 2\varphi = 1$).
4. $\mathscr{D}_R = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leqslant \rho^2 + \theta^2 \leqslant 16\right\}$ ($\mathscr{D}_f$ est la zone du plan (la couronne) située entre les deux cercles de centre l'origine et de rayons respectifs 2 et 4).
5. $\mathscr{D}_A = \left\{(I,t) \in \mathbb{R}^2 / -I < t < I \text{ ou } I < t < -I\right\}$ ($\mathscr{D}_f$ est la réunion des deux quarts de plan délimitée par les deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ contenant les points $(1,0)$ et $(-1,0)$).
6. $\mathscr{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leqslant x^2\right\}$ ($\mathscr{D}_f$ est le demi-plan délimité par la parabole d'équation $y = x^2$ et contenant le point $(0,-1)$).

II.5 Différentielles et formes différentielles