Algèbre linéaire

Denis Bitouzé, d'après un travail de Philippe Roux

IUT du Littoral Côte d'Opale
Département Génie Thermique et Énergie

Année 2019–2020

Plan du cours

1. Calcul matriciel

Matrice à coefficients réels

Définition 1.1 (matrice)

On appelle matrice à coefficients réels à p lignes et n colonnes un tableau de nombres réels comportant p lignes et n colonnes. Une telle matrice A est notée :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

- Coefficient à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne : noté a_{ij}.
- Ensemble des matrices à p lignes et n colonnes : noté $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
- Couple (p, n) : appelé la **taille de la matrice**.

Matrice à coefficients autres que réels

Matrices à coefficients :

- complexes : $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$;
- booléens[1] : $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{B})$;
- etc.

1. $\in \{0, 1\}$

Exemple de matrice

$$\mathscr{M}_{3,4} \ni M = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{4 colonnes}}\right\} \quad \text{3 lignes}$$

$$m_{23} = 8$$

$$\mathscr{M}_{3,4} \ni M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{2}^{\text{e}} \text{ ligne}$$

3e colonne

La numérotation des lignes et colonnes commence à 1 (et pas à 0)

Matrices particulières

Exemple 1.2 (matrice (vecteur) ligne)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$

Exemple 1.3 (matrice (vecteur) colonne)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

Matrices particulières

Exemple 1.4 (matrice nulle)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{4,3} \in \mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

Exemple 1.5 (matrice carrée d'ordre 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Matrices **carrées** particulières

Exemple 1.6 (matrice triangulaire inférieure)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.7 (matrice triangulaire supérieure)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Matrices **carrées** particulières

Exemple 1.8 (matrice diagonale)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.9 (matrice identité)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3$$

✎ Définir une matrice par son élément courant a_{ij} et sa taille

Construire la matrice A de taille $(4, 3)$ telle que $a_{ij} = i + j$

$$A =$$

On pourra vérifier la concordance entre les valeurs de i, j et a_{ij} :

Addition des matrices

Définition 1.10

On appelle addition des matrices l'opération interne sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rccl} + & : & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A + B \end{array}$$

définie par

$$\begin{cases} A & = (a_{ij}) \\ B & = (b_{ij}) \end{cases} \Longrightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemple 1.11 ( )

$$\begin{cases} A & = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B & = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \end{cases} \implies A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 11 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Addition des matrices

$+$ est le modèle des opérations « termes à termes »

Propriétés de l'addition des matrices

Proposition 1.12 (propriétés de l'addition des matrices)

Commutativité : $\forall A, B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}), A + B = B + A$

Associativité : $\forall A, B, C \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}), A + (B + C) = (A + B) + C$

Existence d'un élément neutre : $\exists E \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}),$

$$A + E = E + A = A$$

Existence d'un symétrique : $\forall A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \exists A' \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}),$

$$A + A' = A' + A = 0_{p,n}$$

Remarque 1.13

On prouve que :

- la matrice élément neutre E est la matrice nulle : $0_{p,n} = (0)$;
- si $A = (a_{ij})$, alors A' son symétrique est donné par : $A' = (-a_{ij})$.

Propriété de l'addition des matrices

Par abus de notation, on écrit comme pour les réels : $A + (-B) = A - B$

Démonstration

Il suffit de comparer les éléments courants en position (i, j) : $\forall i = 1, \ldots, p$, $\forall j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
\text{Commutativité :}\quad & a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \implies A + B = B + A \\
\text{Associativité :}\quad & a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} \implies A+(B+C) = (A+B)+C \\
\text{Neutre :}\quad & a_{ij} + 0 = 0 + a_{ij} = a_{ij} \implies A + 0_{p,n} = 0_{p,n} + A = A \\
\text{Symétrique :}\quad & a_{ij} + (-a_{ij}) = (-a_{ij}) + a_{ij} = 0 \implies A + (-A) = \\
& (-A) + A = 0_{p,n}
\end{aligned}$$

Attention, dire que $+$ est commutative sur $\mathbb{R}$ donc $+$ est commutative pour les matrices **par héritage direct** est complètement faux ! En effet, si $(p, n) \neq (1, 1)$, alors $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \not\subset \mathbb{R}$.

Produit matriciel

Définition 1.14 (produit matriciel)

On appelle produit matriciel l'opération

$$\begin{array}{rccl} \times & : & \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{k,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A \times B \end{array}$$

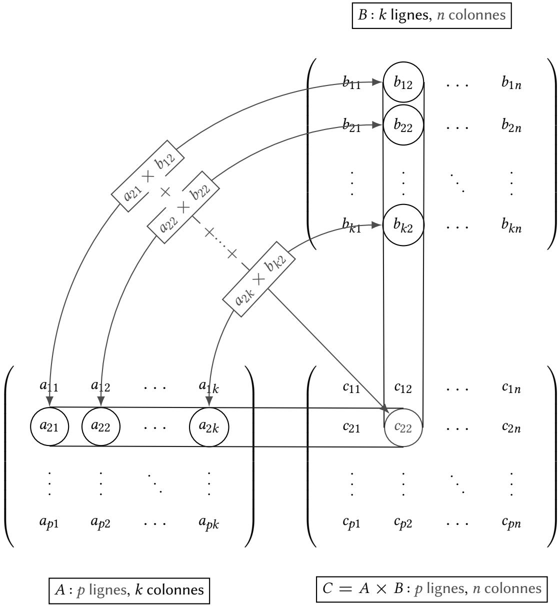
définie par

$$\begin{cases} A & = (a_{ij}) \\ B & = (b_{ij}) \end{cases} \Longrightarrow A \times B = \left(\sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} \right)$$

Remarque 1.15

Pour alléger les notations, on note souvent $A\,B$ pour $A \times B$.

Disposition pour le produit matriciel



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pk} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

En particulier quand $p = k = n$, le produit matriciel $\times$ est une opération interne dans l'ensemble $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n :

$$\begin{array}{cccll} \times & : & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ & & (A, B) & \longmapsto & A \times B \end{array}$$

Exemple de produit matriciel

Existence et taille de la matrice produit

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ donc $A\,B$ existe et $\in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

Calcul des coefficients

$$A\,B = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{cases} c_{11} = 1 \times (-3) + 2 \times 2 + 3 \times 4 = 13 \\ c_{21} = 4 \times (-3) + 2 \times (-1) + 5 \times 4 = 6 \\ c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 2 = 7 \\ c_{22} = 4 \times 1 - 1 \times 0 + 5 \times 2 = 14 \end{cases}$$

Propriétés du produit matriciel

Proposition 1.16 (propriétés du produit matriciel)

Associativité : $\forall A \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_{k,l}(\mathbb{R}), C \in \mathscr{M}_{l,n}(\mathbb{R}), A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$

Distributivité par rapport à l'addition : $\forall A \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R}), B, C \in \mathscr{M}_{k,n}(\mathbb{R})$,

$$A\,(B + C) = (A\,B) + (A\,C)$$

Élément neutre : $\exists E_d, E_g \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} A\,E_d = A \\ E_g\,A = A \end{cases}$$

Remarque 1.17

On démontre que $E_d = \mathrm{Id}_n$ et $E_g = \mathrm{Id}_p$.

Propriétés du produit matriciel

Démonstrations plus complexes que pour une opération terme à terme !

Démonstration distributivité de $\times$ sur $+$

Vérification du fait que tous les produits et les sommes sont bien définis

Pour $A \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ et $B, C \in \mathscr{M}_{k,n}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{cases} A & \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \\ B + C & \in \mathscr{M}_{k,n}(\mathbb{R}) \end{cases} \implies A\,(B + C) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} A\,B & \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A\,C & \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \end{cases} \implies (A\,B) + (A\,C) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Démonstration distributivité de $\times$ sur $+$

Comparaison des éléments courants

- Si $M = A\,(B + C)$ alors

$$m_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}(b_{rj} + c_{rj}) = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} + a_{ir} c_{rj} \tag{1}$$

- Si $P = A\,B$ alors $p_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ik} b_{kj}$
- Si $Q = A\,C$ alors $q_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} c_{rj} = a_{i1} c_{1j} + \cdots + a_{ik} c_{kj}$
- Si $N = (A\,B) + (A\,C)$ alors

$$n_{ij} = p_{ij} + q_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} + \sum_{r=1}^{k} a_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} + a_{ir} c_{rj} \tag{2}$$

D'après les équations (1) et (2), $M = N$. $\square$

Proposition 1.18 (propriétés du produit matriciel des matrices **carrées**)

Élément neutre : $\times$ *est une loi de composition interne (LCI) dans* $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$*, d'élément neutre* Id_n *:*

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), A \times \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n \times A = A$$

Puissance : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$*,*

$$\begin{cases} A^0 = \mathrm{Id}_n \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = A\,A^{k-1} \end{cases}$$

Non-commutativité : $\times$ ***n'est pas commutative*** *:*

$$\exists A, B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), A\,B \neq B\,A$$

Propriétés du produit matriciel

Cas des matrices **carrées** (suite)

Proposition 1.19

Symétrique : *certains éléments*[2] *n'ont pas de symétrique :*

$$\exists A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,n}\}, \forall M \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), A\,M \neq \mathrm{Id}_n$$

Inverse d'un produit : *si A et $B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ possèdent des inverses alors $A\,B$ possède un inverse et :*

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

2. Autres que « zéro ».

Démonstration

- Si $p = n$, les éléments neutres de $\times$ à droite et à gauche sont tous les deux égaux à Id_n qui est donc bien l'élément neutre de $\times$ dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- La définition du produit assure que l'on a bien :

$$\begin{aligned}
A^1 &= A \times A^0 = A \times \mathrm{Id}_n = A \\
A^2 &= A \times A \\
A^k &= \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}
\end{aligned}$$

- Contre-exemple de la commutativité de $\times$ dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (cas $n = 2$) :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \neq & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
\parallel & & \parallel \\
\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Démonstration

- Contre-exemple de l'existence systématique de symétriques pour $\times$ dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (cas $n = 2$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

mais, $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Inverse de $A\,B$:

$$(B^{-1}\,A^{-1})\,(A\,B) = B^{-1}\,(A^{-1}\,A)\,B = B^{-1}\ \mathrm{Id}_n\ B = B^{-1}\,B = \mathrm{Id}_n$$

$$(A\,B)\,(B^{-1}\,A^{-1}) = A\,(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\ \mathrm{Id}_n\ A^{-1} = A\,A^{-1} = \mathrm{Id}_n$$

✎ Inversion d'une matrice

Pour $M = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, on pose $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
M\,M^{-1} = \mathrm{Id}_2 \iff & \begin{pmatrix} -4a - c & -4b - d \\ 3a + c & 3b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} -4a - c = 1 \\ -4b - d = 0 \\ 3a + c = 0 \\ 3b + d = 1 \end{cases} \\
\iff & M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

✎ Inversion d'une matrice (suite)

On peut vérifier que la matrice M^{-1} est bien également l'inverse à gauche de M :

$$
\begin{aligned}
M^{-1}\,M &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Id}_2
\end{aligned}
$$

Produit **non** simplifiable

Proposition 1.20

Pour $A, B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$*,*

$$A\,B = 0_{n,n} \;\; \textbf{\textit{n'implique pas}} \;\; A = 0_{n,n} \;\; \textit{ou} \;\; B = 0_{n,n}.$$

Autrement dit, il existe $A \neq 0_{n,n}$ *et* $B \neq 0_{n,n}$ *tels que* $A\,B = 0_{n,n}$*.*

✎ Le produit matriciel n'est pas simplifiable

$A\,B = A\,C$ **n'implique pas** $B = C$

Produit **non** simplifiable

Exemple 1.21

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A\,B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A\,C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : bien que $A\,B = A\,C$, on a $B \neq C$.

Produit par les réels

Définition 1.22

On appelle multiplication d'une matrice par un réel l'opération définie par :

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & \mathbb{R} \times \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ & & (\alpha, A) & \longmapsto & \alpha \cdot A = (\alpha a_{ij}) \end{array}$$

Exemple 1.23 ( )

$$\begin{cases} \alpha & = 2 \\ A & = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \implies \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Produit par les réels

Remarque 1.24

Multiplier une matrice par un réel consiste à multiplier tous les coefficients de cette matrice par ce même réel.

Remarque 1.25

Pour alléger les notations, on note souvent $\alpha\, A$ pour $\alpha \cdot A$.

Lien entre produit matriciel et produit par les réels

Proposition 1.26

Faire le produit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *par un réel* $\alpha \in \mathbb{R}$ *revient à faire le produit de* A *par une matrice diagonale :*

$$\begin{aligned}
\alpha\, A &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} (a_{ij}) = (\alpha \ \mathrm{Id}_p)\, A \\
&= (a_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = A\, (\alpha \ \mathrm{Id}_n)
\end{aligned}$$

Identités remarquables

$(A+B)^2$ **n'est pas toujours égal à** $A^2+2\,A\,B+B^2$

En effet :

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)\,(A+B)\\ &= A^2+A\,B+B\,A+B^2\\ &\begin{cases}= A^2+2\,A\,B+B^2\\ \neq A^2+2\,A\,B+B^2\end{cases} \quad \textbf{selon que } A\,B\begin{cases}= B\,A\\ \neq B\,A\end{cases}\end{aligned}$$

Erreurs fréquentes dans les calculs

Mise en facteur

On a :

$$A^2 + 2\,A \neq \begin{cases} (A+2)\,A \\ A\,(A+2) \end{cases}$$

En effet :

$$A^2 + 2\,A = \begin{cases} A\,A + (2\ \mathrm{Id}_n)\,A = (A + 2\ \mathrm{Id}_n)\,A \neq (A+2)\,A \\ A\,A + A\,(2\ \mathrm{Id}_n) = A\,(A + 2\ \mathrm{Id}_n) \neq A\,(A+2) \end{cases}$$

Remarque 1.27

Quel sens aurait la somme $A + 2$ d'une matrice et d'un réel ?

Compatibilité entre $\cdot$ et $+$

Proposition 1.28 (propriétés du produit des matrices par un réel)

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour toutes $A, B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$:

- $\alpha\ (\beta\, A) = (\alpha\ \beta)\ A$
- $(\alpha + \beta)\ A = (\alpha\, A) + (\beta\, A)$
- $\alpha\ (A + B) = (\alpha\, A) + (\alpha\, B)$
- $1 \cdot A = A$
- $-1 \cdot A = (-1)\, A = -A$ *(est le symétrique de A pour $+$)*
- $\alpha\, A = 0_{p,n} \iff \alpha = 0$ *ou* $A = 0_{p,n}$

Transposition

Définition 1.29 (transposition)

On appelle transposition l'opération

$$\begin{array}{rccc} {}^t & : & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & & A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

définie par : $A = (a_{ij}) \implies {}^tA = (a_{ji})$.

Remarque 1.30

La transposée ${}^tA$ a pour lignes les colonnes de la matrice A.

✎ Calcul d'une transposée

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \implies {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Propriétés de la transposition

Ne pas confondre transposée et inverse !

$A^{-1} \neq {}^tA$

Remarque 1.31

La transposée existe toujours contrairement à l'inverse.

Proposition 1.32 (propriétés de la transposition)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *et* $C \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$. *Alors :*

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
3. ${}^t(A\,C) = {}^tC\,{}^tA \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$
4. ${}^t(\alpha\,A) = \alpha\,{}^tA$

Démonstration

Comparaison de la taille et des éléments courants

1.
   - A de taille $p \times n \implies {}^tA$ de taille $n \times p \implies {}^t({}^tA)$ de taille $p \times n$.
   - L'élément courant de A est $a_{ij} \implies {}^tA = (a_{ji}) \implies {}^t({}^tA) = (a_{ij})$.
2.
   - ${}^t(A+B)$ et ${}^tA + {}^tB$ de tailles $n \times p$.
   - L'élément courant de $A + B$ est $a_{ij} + b_{ij} \implies {}^t(A+B) = (a_{ji} + b_{ji})$ de même que ${}^tA + {}^tB$.
3.
   - A de taille $p \times n$ et C de taille $n \times q \implies A\,C$ de taille $p \times q \implies {}^t(A\,C)$ de taille $q \times p$.
   - ${}^tA$ de taille $n \times p$ et ${}^tC$ de taille $q \times n \implies {}^tC\,{}^tA$ de taille $q \times p$.
   - L'élément courant de :
     - $A\,C$ est $\sum_{l=1}^{k} a_{il} c_{lj}$;
     - ${}^t(A\,C)$ est $\sum_{l=1}^{k} a_{jl} c_{li}$;
     - ${}^tC\,{}^tA$ est $\sum_{l=1}^{k} c_{li} a_{jl}$.
4.
   - ${}^t(\alpha\,A)$ de taille $n \times p \implies \alpha\,{}^tA$ de taille $n \times p$.
   - L'élément courant de $\alpha\,A$ est $\alpha a_{ij} \implies$ l'élément courant de ${}^t(\alpha\,A)$ est αa_{ji}, identique à celui de $\alpha\,{}^tA$.

Matrices symétriques et anti-symétriques

Définition 1.33

Soit une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice :

symétrique si et seulement si ${}^tA = A$

anti-symétrique si et seulement si ${}^tA = -A$

Proposition 1.34

Toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique. Plus précisément :

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)}_{\textit{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)}_{\textit{anti-symétrique}}$$

Démonstration

En exercice.