Corrigé d'un exercice sur la matrice de rotation dans le plan

Denis Bitouzé

IUT Génie Thermique et Énergie de Dunkerque

7 mai 2020

Plan

Énoncé de l'exercice

Où l'on découvre en quoi la matrice de rotation est une matrice de rotation

Où l'on découvre et prouve que faire subir à un vecteur n fois une rotation d'angle α revient à lui faire subir une rotation d'angle $n\alpha$

Plan

Énoncé de l'exercice

Où l'on découvre en quoi la matrice de rotation est une matrice de rotation

Où l'on découvre et prouve que faire subir à un vecteur n fois une rotation d'angle α revient à lui faire subir une rotation d'angle $n\alpha$

Énoncé de l'exercice

Soit α un réel et R_α la matrice rotation définie par :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Énoncé de l'exercice

Soit α un réel et R_α la matrice rotation définie par :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

1. Calculer R_α^2 et R_α^3.
2. En déduire une formule pour R_α^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ à démontrer par récurrence.

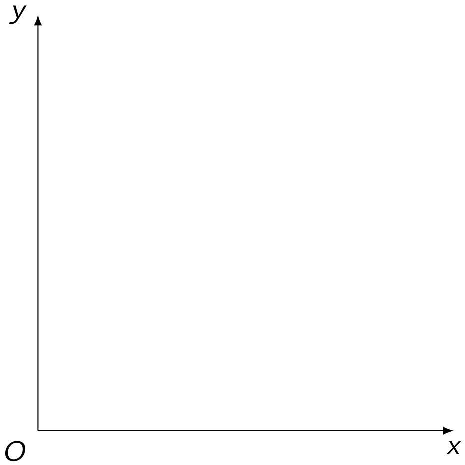
Plan

Énoncé de l'exercice

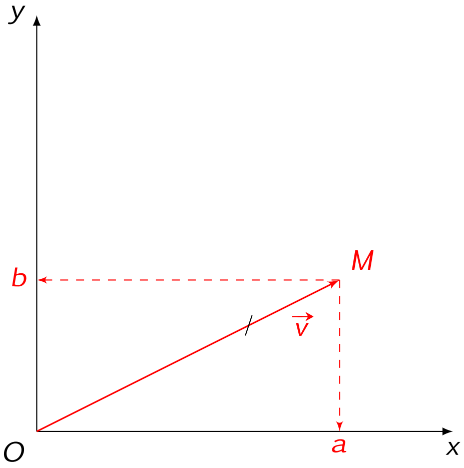
Où l'on découvre en quoi la matrice de rotation est une matrice de rotation

Où l'on découvre et prouve que faire subir à un vecteur n fois une rotation d'angle α revient à lui faire subir une rotation d'angle $n\alpha$

Matrice de rotation



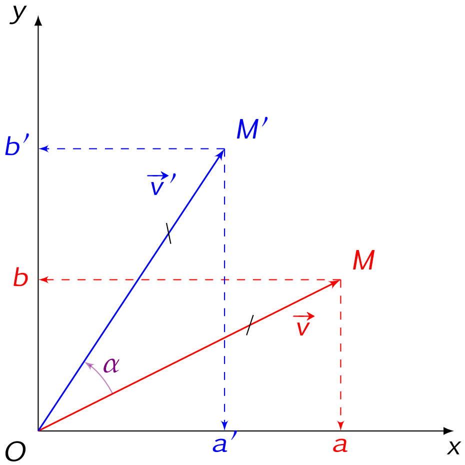
Matrice de rotation



$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Matrice de rotation

$\vec{v}\,' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$

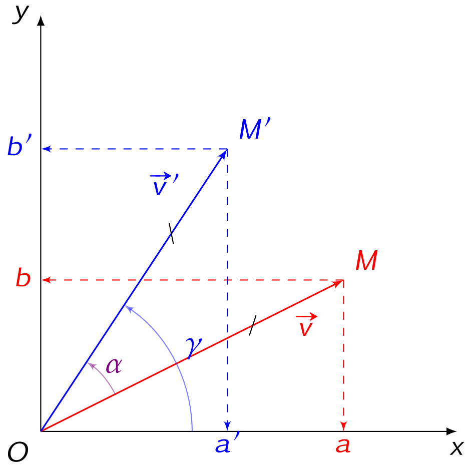


$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{v}\,' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$

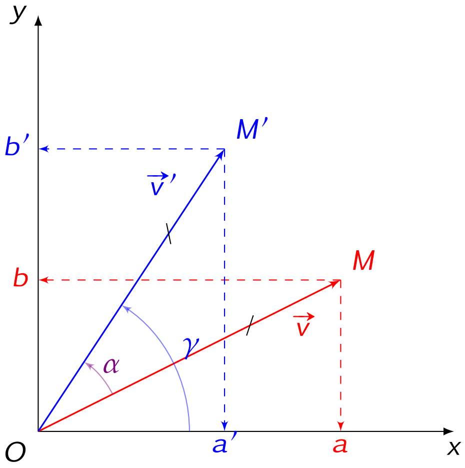


$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix}$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$



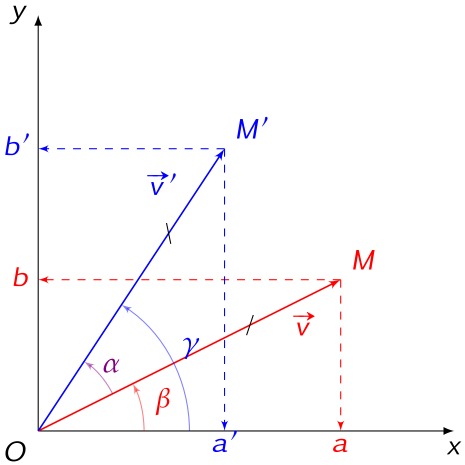
$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$

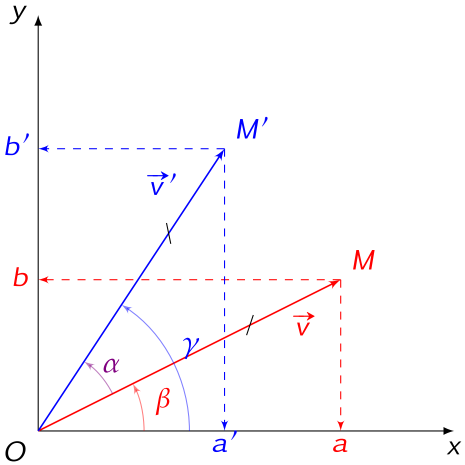


$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix} \\ &= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \\ &= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$



$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix}$$

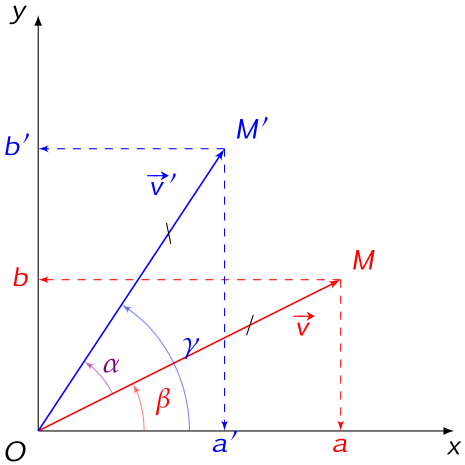
$$= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$

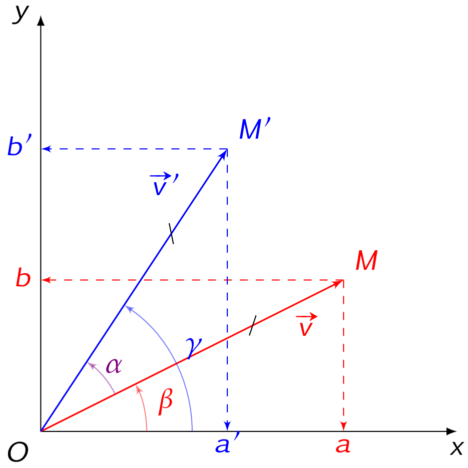


$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$

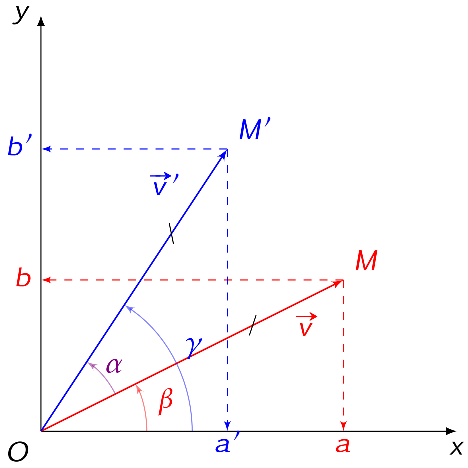


$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$

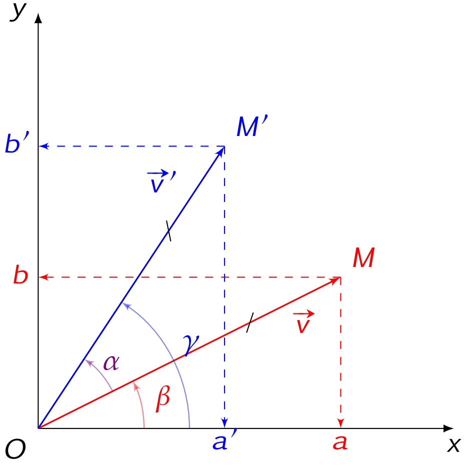


$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OM\cos\beta \\ OM\sin\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$

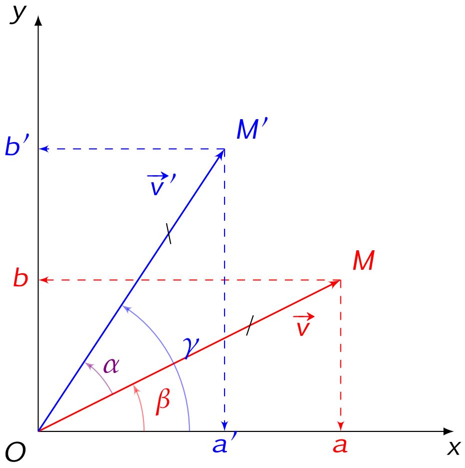


$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OM\cos\beta \\ OM\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$



$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= OM \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

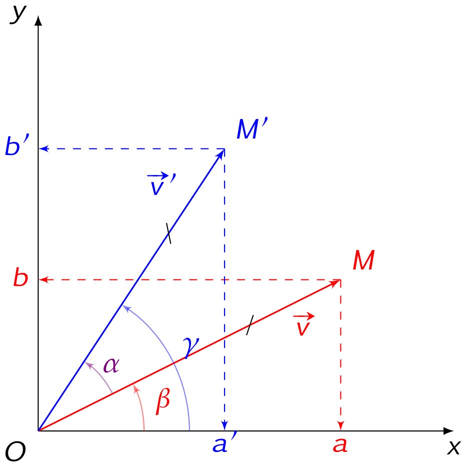
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OM\cos\beta \\ OM\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \vec{v}$$

Matrice de rotation

$\vec{v}\,' = \overrightarrow{OM'}$ vecteur obtenu par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$



$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\,' = \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} OM' \cos\gamma \\ OM' \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM' \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= OM \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OM\cos\beta \\ OM\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \vec{v} \\
&= R_\alpha \vec{v}
\end{aligned}$$

Plan

Énoncé de l'exercice

Où l'on découvre en quoi la matrice de rotation est une matrice de rotation

Où l'on découvre et prouve que faire subir à un vecteur n fois une rotation d'angle α revient à lui faire subir une rotation d'angle $n\alpha$

Calcul de R_α^2

$$R_\alpha^2 = R_\alpha R_\alpha$$

Calcul de R_α^2

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^2 &= R_\alpha R_\alpha \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Calcul de R_α^2

$$\begin{aligned} R_\alpha^2 &= R_\alpha R_\alpha \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de R_α^2

$$\begin{aligned}
R_\alpha^2 &= R_\alpha R_\alpha \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul de R_α^2

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^2 &= R_\alpha R_\alpha \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \\
&= R_{2\alpha}
\end{aligned}
$$

Calcul de R_α^2 (remarque)

Faire subir à un vecteur $\vec{v}$ 2 fois une rotation d'angle α revient à $R_\alpha\left(R_\alpha \vec{v}\right)$.

Calcul de R_α^2 (remarque)

Faire subir à un vecteur $\vec{v}$ 2 fois une rotation d'angle α revient à $R_\alpha\left(R_\alpha \vec{v}\right)$. Or :

$$R_\alpha\left(R_\alpha \vec{v}\right) = \left(R_\alpha R_\alpha\right)\vec{v} \quad \text{(associativité du produit matriciel)}$$

Calcul de R_α^2 (remarque)

Faire subir à un vecteur $\vec{v}$ 2 fois une rotation d'angle α revient à $R_\alpha(R_\alpha \vec{v})$. Or :

$$\begin{aligned} R_\alpha(R_\alpha \vec{v}) &= (R_\alpha R_\alpha)\vec{v} \quad \text{(associativité du produit matriciel)} \\ &= R_\alpha^2 \vec{v} \end{aligned}$$

Calcul de R_α^2 (remarque)

Faire subir à un vecteur $\vec{v}$ 2 fois une rotation d'angle α revient à $R_\alpha(R_\alpha \vec{v})$. Or :

$$\begin{aligned} R_\alpha(R_\alpha \vec{v}) &= (R_\alpha R_\alpha)\vec{v} \quad \text{(associativité du produit matriciel)} \\ &= R_\alpha^2 \vec{v} \\ &= R_{2\alpha}\vec{v} \quad \text{(d'après le calcul précédent)} \end{aligned}$$

Calcul de R_α^2 (remarque)

Faire subir à un vecteur $\vec{v}$ 2 fois une rotation d'angle α revient à $R_\alpha\left(R_\alpha \vec{v}\right)$. Or :

$$\begin{aligned}
R_\alpha\left(R_\alpha \vec{v}\right) &= \left(R_\alpha R_\alpha\right) \vec{v} \quad \text{(associativité du produit matriciel)} \\
&= R_\alpha^2 \vec{v} \\
&= R_{2\alpha} \vec{v} \quad \text{(d'après le calcul précédent)}
\end{aligned}$$

Autrement dit, faire subir à un vecteur 2 fois une rotation d'angle α revient à lui faire subir une rotation d'angle 2α.

Calcul de R_α^3

$$R_\alpha^3 = R_\alpha^2 R_\alpha$$

Calcul de R_α^3

$$\begin{aligned} R_\alpha^3 &= R_\alpha^2 R_\alpha \\ &= R_{2\alpha} R_\alpha \quad \text{d'après le transparent précédent} \end{aligned}$$

Calcul de R_α^3

$$\begin{aligned}
R_\alpha^3 &= R_\alpha^2 R_\alpha \\
&= R_{2\alpha} R_\alpha \quad \text{d'après le transparent précédent} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul de R_α^3

$$\begin{aligned}
R_\alpha^3 &= R_\alpha^2 R_\alpha \\
&= R_{2\alpha} R_\alpha \quad \text{d'après le transparent précédent} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha & -\cos 2\alpha \sin\alpha - \cos\alpha \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha & -\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 2\alpha \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul de R_α^3

$$\begin{aligned}
R_\alpha^3 &= R_\alpha^2 R_\alpha \\
&= R_{2\alpha} R_\alpha \quad \text{d'après le transparent précédent} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha & -\cos 2\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha & -\sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcul de R_α^3

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^3 &= R_\alpha^2 R_\alpha \\
&= R_{2\alpha} R_\alpha \quad \text{d'après le transparent précédent} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha & -\cos 2\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha & -\sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix} \\
&= R_{3\alpha}
\end{aligned}
$$

Calcul de R_α^3

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^3 &= R_\alpha^2 R_\alpha \\
&= R_{2\alpha} R_\alpha \quad \text{d'après le transparent précédent} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha & -\cos 2\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha & -\sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix} \\
&= R_{3\alpha}
\end{aligned}
$$

Donc, de même, faire subir à un vecteur 3 fois une rotation d'angle α revient à lui faire subir une rotation d'angle 3α.

Conjecture

- On conjecture que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.

Conjecture

- On conjecture que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.
- Prouvons-le par récurrence.

Récurrence

Première étape : initialisation

Récurrence

Première étape : initialisation

La relation $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$ est bien vraie au rang $n = 1$.

Récurrence

Première étape : initialisation

La relation $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$ est bien vraie au rang $n = 1$. En effet :

$$R_\alpha^1 = R_\alpha \quad \text{par définition de la puissance d'une matrice}$$

Récurrence

Première étape : initialisation

La relation $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$ est bien vraie au rang $n = 1$. En effet :

$$\begin{aligned} R_\alpha^1 &= R_\alpha \quad \text{par définition de la puissance d'une matrice} \\ &= R_{1\alpha} \end{aligned}$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (programme)

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (programme)

1. On suppose la relation vraie au rang n :

$$R_\alpha^n = R_{n\alpha} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (programme)

1. On suppose la relation vraie au rang n :

$$R_\alpha^n = R_{n\alpha} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

2. On prouve que, alors, la relation est vraie au rang $n+1$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (programme)

1. On suppose la relation vraie au rang n :

$$R_\alpha^n = R_{n\alpha} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

2. On prouve que, alors, la relation est vraie au rang $n+1$:

$$R_\alpha^{n+1} = R_{(n+1)\alpha}$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

On a :

$$R_\alpha^{n+1} = R_\alpha R_\alpha^n$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

On a :

$$\begin{aligned} R_\alpha^{n+1} &= R_\alpha R_\alpha^n \\ &= R_\alpha R_{n\alpha} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

On a :

$$\begin{aligned} R_\alpha^{n+1} &= R_\alpha R_\alpha^n \\ &= R_\alpha R_{n\alpha} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

On a :

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^{n+1} &= R_\alpha R_\alpha^n \\
&= R_\alpha R_{n\alpha} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha & -\cos\alpha\sin n\alpha - \sin\alpha\cos n\alpha \\ \sin\alpha\cos n\alpha + \cos\alpha\sin n\alpha & -\sin\alpha\sin n\alpha + \cos\alpha\cos n\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

On a :

$$\begin{aligned}
R_\alpha^{n+1} &= R_\alpha R_\alpha^n \\
&= R_\alpha R_{n\alpha} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha & -\cos\alpha\sin n\alpha - \sin\alpha\cos n\alpha \\ \sin\alpha\cos n\alpha + \cos\alpha\sin n\alpha & -\sin\alpha\sin n\alpha + \cos\alpha\cos n\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

On a :

$$\begin{aligned}
R_\alpha^{n+1} &= R_\alpha R_\alpha^n \\
&= R_\alpha R_{n\alpha} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha & -\cos\alpha\sin n\alpha - \sin\alpha\cos n\alpha \\ \sin\alpha\cos n\alpha + \cos\alpha\sin n\alpha & -\sin\alpha\sin n\alpha + \cos\alpha\cos n\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix} \\
&= R_{(n+1)\alpha}
\end{aligned}$$

Récurrence

Deuxième étape : hérédité (preuve que la relation est vraie au rang $n+1$)

On a :

$$
\begin{aligned}
R_\alpha^{n+1} &= R_\alpha R_\alpha^n \\
&= R_\alpha R_{n\alpha} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha & -\cos\alpha\sin n\alpha - \sin\alpha\cos n\alpha \\ \sin\alpha\cos n\alpha + \cos\alpha\sin n\alpha & -\sin\alpha\sin n\alpha + \cos\alpha\cos n\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix} \\
&= R_{(n+1)\alpha}
\end{aligned}
$$

La relation est bien vraie au rang $n+1$.

Récurrence

Troisième étape : conclusion

Récurrence

Troisième étape : conclusion

- On a prouvé par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.

Récurrence

Troisième étape : conclusion

- On a prouvé par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.
- Donc, faire subir à un vecteur n fois une rotation d'angle α revient à lui faire subir une rotation d'angle $n\alpha$.

Récurrence

Remarque

On aurait même pu prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.

Récurrence

Remarque

On aurait même pu prouver [1] que, pour tout $n \geqslant 0$, $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.

1. Preuve laissée en exercice.