Exercice 1
Soit n un entier naturel non nul et T_n défini par :

$$T_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. À l'aide du symbole de sommation $\sum$, écrire la somme T_n en compréhension [1].
2. Prouver par récurrence que :

$$T_n \geqslant \sqrt{n}$$

Exercice 2
Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.
2. Calculer A^3.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer l'expession de A^n.
4. Prouver par récurrence la conjecture de la question précédente.

Exercice 3
On considère un réel θ, les vecteurs [2] $u = \binom{1}{0}$ et $v = \binom{0}{1}$, et la droite $\mathscr{D}_\theta$ d'équation [3] :

$$y = (\tan\theta)x$$

On admet par ailleurs le théorème suivant.

Théorème 1.
La matrice S_θ de la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}_\theta$ est donnée par :

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question :
   — on considère le cas particulier $\theta = \frac{\pi}{8}$;
   — on note u' et v' les symétriques de u et v par rapport à la droite $\mathscr{D}_{\frac{\pi}{8}}$. Autrement dit :

$$\begin{cases} u' = S_{\frac{\pi}{8}} \times u \\ v' = S_{\frac{\pi}{8}} \times v \end{cases}$$

   (a) De façon approximative, représenter graphiquement :
      — les vecteurs u et v ;
      — la droite $\mathscr{D}_{\frac{\pi}{8}}$;
      — les vecteurs u' et v'.

1. Contraire de « extension ».
2. Ou matrices uni-colonnes.
3. On prendra garde au fait que l'équation de $\mathscr{D}_\theta$ est $y = (\tan\theta)x$ et *non pas* $y = \theta x$.

(b) Donner l'expression de la matrice $S_{\frac{\pi}{8}}$.

(c) Calculer les vecteurs u' et v'.

2. Dans cette question, θ est un réel quelconque.

(a) À l'aide éventuelle d'un graphique, expliquer en quoi on peut intuiter (*sans calcul*) l'expression de la matrice S_θ^2.

(b) Confirmer par le calcul l'intuition de la question précédente.

3. (a) Expliquer en quoi la question précédente permet de conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_\theta^n = \frac{1}{2}\left((1+(-1)^n)\,\mathrm{Id}_2 + (1-(-1)^n)\,S_\theta\right)$$

(b) Prouver par récurrence la conjecture de la question précédente.

Barème indicatif			
Exercice	n° 1	n° 2	n° 3
Poids relatif	20 %	33 %	47 %