Exercice 1. À titre d'exemple, prouvons que la propriété P_n : $7^n - 1$ est divisible par 6 est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Initialisation : $7^0 - 1 = 0$ et 0 est divisible par 6 donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Supposons P_n vraie et prouvons que, alors, P_{n+1} est vraie *i.e.* $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6.

L'hypothèse de récurrence, $7^n - 1$ est divisible par 6, signifie qu'il existe un entier k tel que $7^n - 1 = 6k$ *i.e.* $7^n = 6k + 1$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 1 &= 7 \times 7^n - 1 \\ &= 7(6k+1) - 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 6k + 6 \\ &= 6(k+1) \end{aligned}$$

Or k est entier donc il en est de même de $k+1$. Donc $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6 *i.e.* P_{n+1} est vraie.

Conclusion : On a prouvé par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, le nombre $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 2.

1. (a) i. Puisque $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ l'équation de la droite $\mathscr{D}_{\frac{\pi}{4}}$ est $y = x$.

   ii. Facile.

   (b) On a :

$$\begin{aligned} S_{\frac{\pi}{4}} &= \begin{pmatrix} \cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & -\cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (c) Il est apparu clairement sur la figure de la question 1(a)ii que, par rapport à la droite $\mathscr{D}_{\frac{\pi}{4}}$, le symétrique u' du vecteur $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ est le vecteur $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, et vice versa. Vérifions-le par le calcul :

$$\begin{aligned} u' &= S_\theta u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= v \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v' &= S_\theta v \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= u \end{aligned}$$

2. (a) Il apparaît clairement que, pour tout vecteur, le symétrique de son symétrique par rapport à $\mathscr{D}_\theta$ est lui-même. On peut donc intuiter que $S_\theta^2 = \mathrm{Id}_2$.

   (b) On a :

$$\begin{aligned} S_\theta^2 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta - \sin 2\theta \cos 2\theta \\ \cos 2\theta \sin 2\theta - \sin 2\theta \cos 2\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Id}_2 \end{aligned}$$

3. (a) On a :
   i. ${S_\theta}^0 = \mathrm{Id}_2$ par définition ;
   ii. ${S_\theta}^1 = S_\theta$;
   iii. ${S_\theta}^2 = \mathrm{Id}_2$ d'après la question précédente ;

   donc ${S_\theta}^3 = S_\theta$, ${S_\theta}^4 = \mathrm{Id}_2$, etc.
   On peut donc conjecturer que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_\theta^n = \begin{cases} \mathrm{Id}_2 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ S_\theta & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

   soit :

$$S_\theta^n = \frac{1}{2}\left((1+(-1)^n)\,\mathrm{Id}_2 + (1-(-1)^n)\,S_\theta\right) \tag{1}$$

   (b) Prouvons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (1) est vraie.
   Initialisation. On a

$$\begin{aligned} S_\theta^0 &= \mathrm{Id}_2 \text{ par définition} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1+(-1)^0\right)\mathrm{Id}_2 + \left(1-(-1)^0\right)S_\theta\right) \end{aligned}$$

   donc (1) est vraie au rang $n = 0$

Hérédité. Supposons (1) est vraie au rang n et prouvons-la au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} S_\theta^{n+1} &= S_\theta S_\theta^n \\ &= S_\theta\left(\frac{1}{2}\left((1+(-1)^n)\operatorname{Id}_2+(1-(-1)^n)S_\theta\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((1+(-1)^n)S_\theta\operatorname{Id}_2+(1-(-1)^n)S_\theta S_\theta\right) \text{ par linéarité} \\ &= \frac{1}{2}\left((1+(-1)^n)S_\theta+(1-(-1)^n)\operatorname{Id}_2\right) \text{ d'après ce qui précède} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1+(-1)^{n+1}\right)\operatorname{Id}_2+\left(1-(-1)^{n+1}\right)S_\theta\right) \end{aligned}$$

donc (1) est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. On a prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_\theta^n = \frac{1}{2}\left((1+(-1)^n)\operatorname{Id}_2+(1-(-1)^n)S_\theta\right)$$

Exercice 3.

1. Facile.
2. Facile.
3. Facile mais ne pas tomber dans le piège consistant à croire que $(A+B)(A-B)$ est systématiquement égal à A^2-B^2.

Exercice 4. À titre d'exemple, corrigeons cet exercice dans le cas où :

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. On a :

$$^tA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. On a :

$$A\,^tA = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 24 \\ 8 & 4 & 12 \\ 24 & 12 & 36 \end{pmatrix}$$

3. On a $^tA\,A = (56)$. Notons que la réponse $^tA\,A = 56$ serait fausse.

Exercice 5.

1. On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_{3,3} \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} A^0 &= \mathrm{Id}_3 && \text{par définition} \\ A^1 &= A && \text{donnée dans l'énoncé} \\ A^2 & && \text{est donnée ci-dessus} \\ A^3 &= 0_{3,3} && \text{par le calcul ci-dessus} \\ A^n &= A^3 A^{n-3} && \\ &= 0_{3,3} A^{n-3} && \\ &= 0_{3,3} && \text{car } 0_{3,3} \text{ est l'élément absorbant du produit dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$